3. Mahler, K. Perfect systems / K. Mahler // Comp. Math. – 1968. – Vol. 19. – P. 95–166.

4. Aptekarev, A.I. Asymptotics of Hermite-Pade polynomials / A.I. Aptekarev, H. Stahl // Progress in Approximation Theory / A.A. Gonchar and E.B. Saff. (Eds.). – New York ; Berlin : Springer-Verlag, 1992. – P. 127–167.

5. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989. – 408 с.

УДК 004.42

В.Г. АФОНИН
Брест, БрГТУ

ОБ ОТЫСКАНИИ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ В MATHCAD

Математический пакет MathCAD эксплуатируется начиная с 1986 года и является одним из самых популярных пакетов в мире. MathCAD широко используется как в учебном процессе, так и при проектировании.

В настоящее время (начиная с версии MathCAD 14, 2007 год) MathCAD поддерживает и развивает мировой лидер в области автоматизации машиностроительного проектирования – американская компания PTC (Parametric Technology Corporation).

MathCAD также широко используется в строительном проектировании и при решении многих других практически важных задач.

Встроенные справочные системы MathCAD для отыскания корней полиномов с вещественными и комплексными коэффициентами рекомендуют использовать встроенную функцию **polyroots** и символьную операцию **solve**. Но при этом никак не анализируются достоинства и недостатки этих двух способов решения задачи. Подавляющее большинство известных специалистов, в том числе и авторов книг по MathCAD, рекомендуют в первую очередь использовать специализированную функцию **polyroots.** Насколько известно автору, и в учебном процессе в вузах доминируют эти же рекомендации. Не исключено, что даже в проектных организациях для отыскания корней полиномов используется встроенная функция **polyroots.**

Ниже на простых примерах демонстрируются существенные недостатки функции **polyroots.**

Символьная операция **solve,** которая широко используется для решения самых разнообразных задач (в том числе и систем уравнений), по мнению автора, подобных недостатков не имеет. Она позволяет отыскивать корни многочленов практически произвольного порядка с высочайшей точностью. Отыскивать корни полиномов символьно можно также с помощью блока Given/Find.

Пример 1. Задаём обычный полином 3-го порядка:

$$P3(x) := (x - 1.01)\cdot(x - 1.02)\cdot(x - 1.03).$$

С помощью символьной операции **coeffs** находим вектор коэффициентов **CoeffsP3** при степенях x многочлена P3(x):

$$CoeffsP3 := P3(x)\ \text{coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1.061106 \\ 3.1211 \\ -3.06 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью функции **polyroots** находим RootsP3 – вектор корней P3(x):

$$RootsP3 := \text{polyroots}(CoeffsP3) = \begin{pmatrix} 1.008517077839168 \\ 1.024689380291594 \\ 1.026793541869238 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что полученное решение задачи трудно признать удовлетворительным: разница между точным и приближённым решением достаточно велика.

Пример 2. Задаём обычный полином 4-го порядка:

$$P4(x) := (x - 1.01)\cdot(x - 1.02)\cdot(x - 1.03)\cdot(x - 1.04).$$

По аналогии с примером 1 с помощью функции **polyroots** легко получить следующие корни P4(x) с четырьмя цифрами после десятичной точки: x1 = 1.0059, x2 = 1.0243+0.0103i, x3 = 1.0258 – 0.0111i, x4 = 1.0440+0.0001i.

Очевидно, что полученное решение задачи, содержащее 3 комплексных корня, просто неудовлетворительно!

Пример 3. Полином 4-го порядка с двумя кратными корнями:

$$P2\_2(x) = (x - 7.1)^2\cdot(x - 7.4)^2.$$

По аналогии с примером 1 с помощью функции **polyroots** получаем следующие корни P2_2(x) с четырьмя цифрами после десятичной точки:

x1 = 6.9962, x2 = 7.25–0.1394i, x3 = 7.25+0.1394i, x4 = 7.5038.

Очевидно, что полученное решение задачи более чем неудовлетворительно!

Легко проверить, что поиск корней через символьную операцию **solve** во всех 3-х примерах даёт абсолютно точные результаты.

Более того, операция solve позволяет выделять корни многочлена, обладающие определенными свойствами, например, находить только вещественные корни. Приведём пример.

$$P5(x) := (x + 2.52)\cdot(x - 5.44)\cdot\left(x - 7\sqrt{-1}\right)\cdot\left(x^2 + 3.83\right).$$

Найдём вектор корней:

$$\mathrm{vKorni} := \mathrm{P5}(x)\ \mathrm{solve}\ \rightarrow \begin{pmatrix} -2.52 \\ 5.44 \\ 7i \\ 1.9570385790780926759i \\ -1.9570385790780926759i \end{pmatrix}.$$

Вычислим вектор невязки приближённого решения:

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{P5}(\mathrm{vKorni})}\right)^{T} = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$$

Очевидно, решение получено без погрешностей.

Найдём вектор вещественных корней:

$$\mathrm{vKorniReal} := \mathrm{P5}(x) \left| \begin{array}{l} \mathrm{solve} \\ \mathrm{assume}\ , x = \mathrm{real} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -2.52 \\ 5.44 \end{pmatrix}$$

Эта возможность операции solve позволяет разрабатывать вычислительно–графические документы (ВГД), где требуется отыскание всех вещественных корней многочлена произвольной степени.

На этой основе автором разработан и внедрён в учебный процесс ВГД для отыскания всех вещественных корней, всех локальных экстремумов и точек перегиба произвольного многочлена с построением графика на промежутке, содержащем все нули самого многочлена, а также его первой и второй производных. Принципиально важно, что этот промежуток легко находится в автоматическом режиме. Таким образом, задачу полного исследования полинома произвольной степени в MathCAD на основе операции solve можно считать решённой.

Выводы и рекомендации.

1. Даже при отыскании корней многочленов невысоких степеней функция **polyroots** может выдавать неудовлетворительные результаты!!!

2. Использование функции **polyroots** фактически требует дополнительной процедуры – символьного отыскания коэффициентов при степенях x данного многочлена. Это существенно затрудняет использование функции **polyroots** в программных блоках.

3. Символьная операция общего назначения **solve** выдаёт практически точные результаты при поиске корней многочлена произвольной степени.

4. Операция **solve** проще в использовании, чем функция **polyroots**.

5. Можно показать, что, начиная с версии MathCAD 14, операцию **solve** можно без проблем использовать в программных блоках.

Итоговые выводы и рекомендация.

При отыскании корней любых многочленов во всех случаях не рекомендуется использовать функцию polyroots. Вместо неё следует использовать символьную операцию общего назначения solve.

УДК 517.95

А.И. БАСИК, Н.С. КИРИЛЬЧУК
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В настоящей работе доказывается одно специальное интегральное представление дифференцируемых вектор-функций, обобщающее известную из анализа формулу Бореля-Помпею [1, с. 94, формула (16)] (см. также формулу (42) на с. 220).

Пусть $A_j (j=1,\dots,n)$ – невырожденные квадратные матрицы p-ого порядка, удовлетворяющие условиям:

$$A_k^{-1}A_j + A_j^{-1}A_k = 2E\delta_{kj},\ (k,j=1,\dots,n), \tag{1}$$

где E – единичная матрица p-ого порядка, δ_{kj} – символ Кронекера.

Для точек $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in R^n$ введем следующие обозначения:

$$D(\xi):=\sum_{j=1}^{n}A_j\xi_j,\quad D^*(\xi):=\sum_{j=1}^{n}A_j^{-1}\xi_j.$$

Пусть далее Ω – область в пространстве R^n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Для точек $y\in\partial\Omega$ через $M(x;y)$ обозначим $p\times p$ матрицу

$$M(x,y):=-D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}\cdot D(\nu(y)), \tag{2}$$

где $\nu(y)=(\nu_1(y),\dots,\nu_n(y))$ – единичное поле внешних нормалей на поверхности $\partial\Omega$, $\partial/\partial y=(\partial/\partial y_1,\dots,\partial/\partial y_n)$.

Через $N(x;y)$ обозначим матричный, размера $p\times p$, дифференциальный оператор, действующий по формуле:

$$N(x;y)U(y):=-D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{(n-2)|x-y|^{n-2}}\cdot D\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)U(y), \tag{3}$$

здесь $U(y)=(u_1(y),\dots,u_n(y))^T$ – функциональный вектор-столбец высоты p.

Лемма. *Пусть вектор-функция* $U:\Omega\to R^p$ *непрерывна в области* $\Omega\subset R^n$. *Тогда в каждой точке* $x\in\Omega$ *выполнено равенство*