Министерство образования Республики Беларусь
Брестский политехнический институт
Кафедра физики

Лабораторные работы по курсу физики

механика

$$\boxed{m\vartheta \cdot \ell = I\omega}$$

М4. *Определение скорости пули при помощи крутильного баллистического маятника*

(Методические указания)

Брест 1997

УДК 53 (076.5)

В методических указаниях приведено описание лабораторной работы М4 «Определение скорости пули при помощи крутильного баллистического маятника», в которой экспериментально проверяются зависимости между физическими величинами характеризирующими крутильные колебания баллистического маятника и с его помощью измеряется скорость пули.

Лабораторная работа предназначена для студентов всех специальностей и форм обучения в БПИ.

Составители: Е. В. Луценко, доцент, к. ф.-м. н.,
Н. И. Чопчиц, доцент,
А. А. Гладыщук, доцент, к. ф.-м. н.

Рец[illegible].

Лабораторная работа М - 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ ПРИ ПОМОЩИ КРУТИЛЬНОГО БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

1. Цель работы:

- изучение принципа работы баллистического маятника и закона сохранения момента импульса;
- экспериментальная проверка зависимостей между физическими величинами, характеризующими крутильные колебания;
- экспериментальное определение постоянной упругих сил кручения и момента инерции баллистического маятника;
- определение коэффициента затухания крутильных колебаний.
- экспериментальное определение с помощью баллистического маятника скорости пули.

2. Приборы и принадлежности:

баллистический маятник ГРМ-02 со счетчиком периодов, миллисекундомером и стреляющим устройством.

3. Описание установки

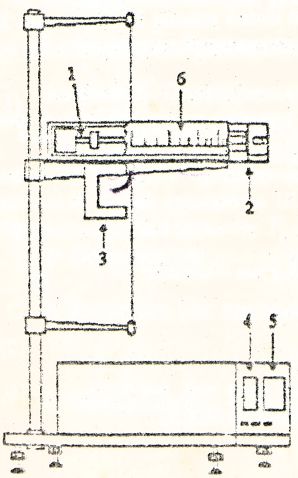

Рисунок 1

Общий вид установки "ГРМ-02" показан на рис.1. Она состоит из: баллистического маятника (1), подвешенного на стальной нити и состоящего из двух стальных стержней, заполненных пластилином мишеней и перемещаемых грузов; стреляющего устройства (2); фотоэлектрического датчика (3); счетчика числа периодов (4); миллисекундомера (5) и угловой шкалы (6). Установка позволяет измерять период колебаний и угловую амплитуду баллистического маятника, а также угловую амплитуду при абсолютно неупругом ударе пули о мишень с пластилином.

4. Подготовка прибора к работе и проведение измерений

Проверьте заземление прибора. Работа с прибором допускается только при наличии заземления. Прибор включается в сеть кнопкой **"СЕТЬ"**. Положение равновесия баллистического маятника устанавливается так, чтобы оно соответствовало нулю угловой шкалы.

Измерение периода колебаний баллистического маятника осуществляется следующим образом. Подвижные грузы закрепите в положении, предложенном в задании. Нажмите кнопку **"СБРОС"**, отклоните баллистический маятник на заданный угол от положения равновесия и отпустите. По достижении баллистическим маятником числа колебаний на единицу меньшего (9), чем предлагаемое (10), нажмите кнопку **"СТОП"**. В этом случае прекращается счет времени и числа полных колебаний. Период колебаний равен времени, деленному на количество колебаний.

Измерение угловой амплитуды при абсолютно неупругом ударе пули о мишень с пластилином баллистического маятника. Для измерения зарядите стреляющее устройство пулей, установите подвижные грузы в предлагаемое положение. Проверьте, соответствует ли положение равновесия "нулю" угловой шкалы. Нажав на затвор стреляющего устройства, зарегистрируйте максимальный угол, на который отклонился баллистический маятник.

Измерение коэффициента затухания при определенном положении R_i подвижных грузов баллистического маятника производится следующим образом. Очень аккуратно отведите маятник на угол равный $\varphi_0 \approx 30^0$ и измерьте угол, на который отклонится маятник при возращении в исходное положение после десяти периодов колебаний φ_{10}. Измеренный угол будет соответствовать амплитуде затухающих колебаний через время равное 10 периодам. В этом случае (см. приложение 1) коэффициент затухания будет находиться по формуле:

$$\delta_i = \ln(\varphi_0/\varphi_{10})/(10T_i), \tag{1}$$

где T_i - период колебаний, соответствующий положению подвижных грузов R_i. Желательно провести 5 - 10 измерений и в качестве значения взять его среднее значение коэффициента затухания:

$$\langle\delta_i\rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}, \tag{2}$$

погрешность среднеквадратичного разброса при этом составит:

$$\Delta\delta_i = t\cdot\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\langle\delta_i\rangle-\delta_{ij}\right)^2}{n\cdot(n-1)}}, \tag{3}$$

где t - коэффициент Стьюдента для n измерений (при n=5, t=0.74; при n=10, t=0.70), j - номер опыта при положении подвижных грузов R_i.

5. Основные положения теоретической модели

Баллистическая идея измерения скорости пули, заключается в том что за время взаимодействия угловая скорость баллистического маятника изменяется значительно, а его угловое перемещение незначительно и им можно пренебречь. Естественно, что это условие выполняется в том случае, если масса маятника намного больше массы пули.

Скорость пули определяется по измерению максимального угла отклонения маятника после неупругого соударения с пулей. В этом случае физическая ситуация может быть описана с помощью закона сохранения энергии и закона сохранения момента импульса.

Однако, любая теоретическая модель является лишь приближенным описанием физической ситуации, так как пренебрегает влиянием многих эффектов, имеющих место в эксперименте. В данной работе представлены две теоретические модели.

В первой теоретической модели считается, что удар пули о баллистический маятник является абсолютно упругим. Смещением центра масс относительно оси в процессе соударения и, как следствие этого, упругими колебаниями маятника, то есть перераспределением энергии между крутильными и упругими колебаниями, пренебрегаем. Крутильные колебания считаем не затухающими.

Во второй модели учтен тот факт, что в процессе крутильных колебаний их энергия диссипирует как за счет неупругих деформаций внутри струны подвеса маятника, так и за счет сопротивления воздуха.

6. Порядок выполнения работы

Первая теоретическая модель

Задание 1. Определение момента инерции баллистического маятника и коэффициента упругих сил кручения

1) Установите подвижные грузы на одинаковом расстоянии R_1 от оси вращения. Отклонив баллистический маятник на угол $\varphi \sim 20^o$, измерьте период колебаний T_1 как среднее за 10 колебаний. Повторите опыт несколько раз и вычислить среднее значение T_1.

2) Измените положение подвижных грузов (R_2, R_3) и повторите опыт (T_2, T_3).

3) Вычислите (см. приложение 1) коэффициент упругих сил кручения

$$C = \frac{8\pi M\left(R_i^2 - R_j^2\right)}{T_i^2 - T_j^2} \tag{4}$$

и момент инерции баллистического маятника

$$I_o = \frac{2M\left(T_i^2 R_j^2 - T_j^2 R_i^2\right)}{T_i^2 - T_j^2}. \quad (5)$$

4) Измените положение подвижных грузов (R_i') и повторите пункты 2,3.

Задание 2*. Определение момента инерции баллистического маятника и коэффициента упругих сил кручения методом наименьших квадратов

1) Установите подвижные грузы на одинаковом расстоянии R_i от оси вращения. Отклонив баллистический маятник на угол φ~20^o , измерьте период колебаний T_i как среднее за 10 колебаний. Изменяя расстояние от оси вращения до подвижных грузов R_i, повторите опыт 6-8 раз.

2) Согласно теории (приложение 1) значения T_i и R_i должны быть связаны между собой соотношением:

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2 \cdot I_0}{C} + \frac{8\pi^2 M}{C} \cdot R_i^2, \quad (6)$$

где I_0 и C - неизвестные момент инерции баллистического маятника и постоянная упругих сил кручения, M - масса подвижных грузов. Поэтому, если на координатную плоскость, по оси абсцисс которой откладываются значения $X_i = R_i^2$, а по оси ординат значения переменной $Y_i = T_i^2$, нанести экспериментальные точки, то они должны ложиться на прямую:

$$Y_i = A + B \cdot X_i, \quad (7)$$

где $A = \frac{4\pi^2 \cdot I_0}{C}$, $B = \frac{8\pi^2 M}{C}$. Нанесите экспериментальные точки (Xi, Yi) на координатную плоскость и убедитесь, что они ложатся на прямую.

3) Применяя к зависимости (7) метод наименьших квадратов (МНК), получим значения A и B для наилучшей прямой, соответствующей экспериментальным точкам:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i Y_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2}; A = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i - B \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \quad (8)$$

Вычислите коэффициенты линейной регрессии A и B по формуле (8) и постройте на координатной плоскости наилучшую прямую. Используя найденные значения A и B, вычислите значения момента инерции баллистического маятника и коэффициент упругих сил $C = \frac{8\pi^2 \cdot M}{B}$, $I_0 = \frac{A \cdot C}{4\pi^2}$.

4*) Вычислите значение χ^2 по формуле: $\chi^2 = \sum_i \left(\frac{Y_i - (A + BX_i)}{\Delta Y_i}\right)^2$, (9) где ΔY_i - погрешность измерения Y_i в i-том опыте. Так как $Y_i = T_i^2$, то $\Delta Y_i = 2T_i \cdot \Delta T_i$, а относительная погрешность измерения в данной установке $\frac{\Delta T_i}{T_i} = 5 \cdot 10^{-4}$ с. Используя критерий согласия Пирсона определите достоверность теоретической модели.

5*) Определите погрешности определения коэффициентов A и B, а также I_o и С.

6*) Сравните полученные результаты с предыдущим заданием и сделайте выводы.

Задание 3. Определение скорости пули

1) Зарядите стреляющее устройство и, установив подвижные грузы на одинаковом расстоянии R (выбранном произвольно), произведите выстрел, измерив при этом максимальное отклонение баллистического маятника φ_{max} и расстояние от оси вращения до центра масс пули ℓ. По формуле (см. приложение 2)

$$v = \sqrt{CI} \cdot \frac{\varphi_{max}}{m\ell} \tag{10}$$

вычислите скорость пули, где $I = I_0 + 2MR^2$. Повторите опыт несколько раз и вычислите среднее значение скорости пули.

<u>Вторая теоретическая модель*</u>

Задание 1. Определение момента инерции баллистического маятника и коэффициента упругих сил кручения методом наименьших квадратов

1) Установите подвижные грузы на одинаковом расстоянии R_i от оси вращения. Отклонив баллистический маятник на угол φ~20°, измерьте период колебаний T_i как среднее за 10 колебаний, а среднее значение коэффициента затухания $\delta_i = \ln(\varphi_0/\varphi_{10})/(10T_i)$ (2) и разброс его значений $\Delta\delta_i$ (3) как показано в методике работы с прибором. Изменяя расстояние от оси вращения до подвижных грузов R_i, повторите опыты 6-8 раз.

2) Согласно теории (приложение 1) значения T_i, R_i и δ_i должны быть связаны между собой соотношением

$$\frac{C}{I_0 + 2MR_i^2} = \frac{4\pi^2}{T_i^2} + \delta_i^2 \tag{11}$$

где I_0 и C - неизвестные момент инерции баллистического маятника и постоянная упругих сил кручения, M - масса подвижных грузов. Поэтому, если на координатную плоскость, по оси абсцисс которой откладываются значения

$X_i = R_i^2$, а по оси ординат значения переменной $Y_i = \dfrac{1}{\left(\dfrac{4\pi^2}{T_i^2} + \delta_i^2\right)}$, нанести экспериментальные точки, то они должны ложиться на прямую: $Y_i = A + B \cdot X_i$, (12)

где: $A = I_0/C$, $B = 2M/C$. Нанесите экспериментальные точки (Xi, Yi) на координатную плоскость и убедитесь, что они ложатся на прямую.

3) Применяя к зависимости (12) метод наименьших квадратов, получим значения A и B - (8) для наилучшей прямой, соответствующей экспериментальным точкам. Вычислите коэффициенты A и B линейной регрессии по формуле (8), постройте на координатной плоскости наилучшую прямую. Используя найденные значения A и B, вычислите значения момента инерции баллистического маятника и коэффициент упругих сил $C = 2M/B$, $I_0 = A \cdot C$.

4*) Вычислите значение $\chi^2 = \sum_i \left(\dfrac{Y_i - (A + BX_i)}{\Delta Y_i}\right)^2$. Так как $Y_i = \dfrac{1}{\left(\dfrac{4\pi^2}{T_i^2} + \delta_i^2\right)}$,

то
$$\Delta Y_i = \sqrt{\left(\left[\delta_i^2 + 4\pi/T_i^2\right]^{-2} \cdot 4\pi \frac{-2}{T_i^3} \cdot \Delta T_i\right)^2 + \left(\left[\delta_i^2 + 4\pi/T_i^2\right]^{-2} \cdot 2\delta_i \cdot \Delta\delta_i\right)^2}, \qquad (13)$$

погрешность измерения периода в данной установке $\Delta T_i = T_i \cdot 5 \cdot 10^{-4}$с, а погрешность измерения δ_i определялась в первом пункте. Используя критерий согласия Пирсона определите достоверность теоретической модели.

5*) Определите погрешности определения коэффициентов A и B, а также I_o и C.

6*) Сравните полученные значения с результатами, полученными для первой теоретической модели.

Задание 2*. Определение момента инерции баллистического маятника и коэффициента упругих сил кручения методом наименьших квадратов с весовыми коэффициентами

1*) В предыдущем задании при вычислении коэффициентов не учитывалось на сколько значимы результаты при различных положениях грузов (приложение 1). Для точного определения зависимости Y от X (в конечном итоге для более точного определения I_o и C) необходимо учитывать дисперсию Y_i при каждом положении грузов X_i. Задание отличается от предыдущего только способом расчета коэффициентов линейной регрессии A и B. Поэтому выполните первые два пункта предыдущего задания.

2*) Применяя к зависимости (12) метод наименьших квадратов с весовыми коэффициентами, получим значения A и B для наилучшей прямой, соответствующей экспериментальным точкам (приложение 1):

$$B = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\langle Y_i\rangle}{\Delta Y_i^2}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\Delta Y_i^2}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\Delta Y_i^2}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i\langle Y_i\rangle}{\Delta Y_i^2}\right)\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\Delta Y_i^2}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\Delta Y_i^2}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\Delta Y_i^2}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i^2}{\Delta Y_i^2}\right)\right)}, \tag{14}$$

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\langle Y_i\rangle/\Delta Y_i^2\right) - B\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i/\Delta Y_i^2\right)\right)\Bigg/\sum_{i=1}^{n}\left(1/\Delta Y_i^2\right)$$

где $\Delta Y_i = \sqrt{\left(\left[\delta_i^2 + 4\pi/T_i^2\right]^{-2}\cdot 4\pi\frac{-2}{T_i^{-3}}\cdot\Delta T_i\right)^2 + \left(\left[\delta_i^2+4\pi/T_i^2\right]^{-2}\cdot 2\delta_i\cdot\Delta\delta_i\right)}$, $\Delta T_i = T_i\cdot 5\cdot 10^{-4}$с, а погрешность измерения δ_i - $\Delta\delta_i$ определялась в первом пункте. Вычислите коэффициенты A и B линейной регрессии, постройте на координатной плоскости наилучшую прямую. Используя найденные значения A и B вычислите значения момента инерции баллистического маятника и коэффициент упругих сил $C = 2M/B$, $I_0 = A\cdot C$.

3***) Вычислите значение $\chi^2 = \sum_i\left(\frac{\overline{Y}_i - (A + BX_i)}{\Delta Y_i}\right)^2$. Определите достоверность теоретической модели и сравните ее с первой моделью и результатами предыдущего варианта.

4***) Определите погрешности определения коэффициентов A и B, а также I_0 и C.

5***) Сравните полученные значения C и I_0 для первой и второй модели, а также для различных заданий каждой из моделей.

Задание 3. Определение скорости пули

1*) Зарядите стреляющее устройство и, установив подвижные грузы на одинаковом расстоянии R, произведите выстрел, измерив при этом максимальное отклонение баллистического маятника φ_i^{max} и расстояние от оси вращения до центра масс пули ℓ_i. Изменяя расстояние от оси вращения до центра грузов R_i и период колебаний T_i повторите опыт 5-10 раз.

2*) Согласно теории (приложение 2) при учете сил вязкого трения (сопротивления воздуха) и неупругих деформаций внутри струны подвеса маятника значения φ_i^{max}, ℓ_i, ϑ_i, δ_i и R_i должны быть связаны между собой соотношением:

$$\vartheta_i = \frac{I_i}{m\ell_i}\cdot\left(\frac{2\pi\varphi_i^{max}}{T_i}\right)\cdot e^{(\delta_i T_i/4)}, \tag{15}$$

где $I_i = I_0 + 2MR_i^2 + m\ell_i^2$ - момент инерции баллистического маятника с пулей; ℓ_i - расстояние от оси вращения до центра масс пули; φ_i^{max} - максимальный угол отклонения в i - том опыте, T_i - период колебаний маятника после удара пули, а δ_i - коэффициент затухания, соответствующие положению грузов R_i, M - масса подвижных грузов.

Вычислите по формуле (15) значения скорости пули. Найдите ее среднее значение и среднеквадратичную погрешность:

$$\langle \vartheta \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i}{n}, \quad \Delta\vartheta = t \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\langle \vartheta \rangle - \vartheta_i \right)^2}{n \cdot (n-1)}}, \tag{16}$$

где t - коэффициент Стьюдента для n измерений (при n=5, t=0.74; при n=10, t=0.70),

Приложение 1

Определение собственного момента инерции баллистического маятника и постоянной упругих сил кручения

Первая модель

В первой теоретической модели экспериментальной ситуации пренебрежем силами вязкого трения. В этом случае ***основное уравнение динамики вращательного движения,*** описывающее вращательное движение баллистического маятника, примет вид:

$$\boxed{I \cdot \varepsilon = M_{упр}},$$

где I - момент инерции баллистического маятника, $\varepsilon = \omega_t' = \varphi_t''$ - угловое ускорение, ω - угловая скорость, а момент сил без учета вязкого трения будет равен моменту упругих сил деформации кручения: $M_{упр} = -C \cdot \varphi$, где C - постоянная упругих сил кручения, φ - угол отклонения маятника от положения равновесия. Учитывая, что угловое ускорение является второй производной по времени от угла, основное уравнение вращательного движения можно переписать в виде:

$$I \cdot \varphi_t'' = -C \cdot \varphi.$$

Таким образом, движение баллистического маятника можно описать дифференциальным уравнением второго порядка:

$$\varphi_t'' + \left(\frac{C}{I} \right) \cdot \varphi = 0 . \tag{П.1.1}$$

Решением уравнений типа: $x_t'' + \omega_0^2 x = 0$, является функция, имеющая вид: $x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha)$, которая описывает гармонические колебания, где амплитуда - A и начальная фаза - α определяются начальными условиями, а ω_0 - циклическая частота колебаний, которая определяется конструкцией маятника, и связана с периодом следующим соотношением: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

В случае баллистического маятника циклическая частота (из П.1.1) определяется выражением $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I}}$. В первом задании лабораторной работы необходимо определить постоянную упругих сил кручения и момент инерции маятника. Для этого необходимо отклонить маятник от положения равновесия на угол φ_m и наблюдать свободные колебания баллистического маятника. В такой ситуации в начальный момент времени маятник был отклонен от положения равновесия на угол φ_m и его угловая скорость равнялась нулю. Для таких начальных условий $A=\varphi_m$, $\alpha=0$, а решение дифференциального уравнения (П.1.1) примет вид:

$$\varphi = \varphi_m \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{C}{I}} \cdot t\right), \qquad (П.1.2)$$

где период колебаний крутильного маятника будет равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \qquad (П.1.3)$$

Согласно теореме Штейнера-Гюйгенса момент инерции тела относительно оси вращения будет равен произведению массы тела на квадрат расстояния от центра масс тела до оси вращения плюс собственный момент инерции тела. Таким образом, момент инерции баллистического маятника можно представить в виде:

$$I = I_0' + 2MR_i^2 + 2I_{соб.}, \qquad (П.1.4)$$

где I_0' - момент инерции станины и ложечек маятника; $I_{соб.}$ - собственный момент инерции груза; M - масса груза; R_i - расстояние от центра груза до оси вращения. Момент инерции баллистического маятника можно представить в виде:

$$I_i = I_0 + 2MR_i^2, \qquad (П.1.5)$$

где $I_0 = I_0' + 2I_{соб.}$. Таким образом, из (1.3) следует, что

$$T_i^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{I_0 + 2MR^2}{C}. \qquad (П.1.6)$$

В этом уравнении две неизвестные величины: постоянная упругих сил C и I_0. Поэтому для их определения, в принципе, достаточно провести два измерения периода колебаний (T_1, T_2) для различных значений положения подвижных грузов (R_1, R_2). В этом случае, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{T_1^2}{4\pi^2} = \frac{I_0 + 2MR_1^2}{C} \\ \frac{T_2^2}{4\pi^2} = \frac{I_0 + 2MR_2^2}{C} \end{cases}, \qquad (П.1.7)$$

получим выражения для определения I_0 и C:

$$\boxed{I_o = \frac{2M\left(T_2^2R_1^2 - T_1^2R_2^2\right)}{T_1^2 - T_2^2}}, \quad \boxed{C = \frac{8\pi M\left(R_1^2 - R_2^2\right)}{T_1^2 - T_2^2}}. \qquad (П.1.8)$$

Однако более корректно будет проверить функциональную зависимость периода крутильных колебаний (T_i) от положения подвижных грузов (R_i). Для этого при нескольких (n = 6 -8) значениях положения грузов R_i, выводя маятник из положения равновесия, проведем измерения T_i.

Представим формулу 1.6 в следующем виде:

$$T_i^2 = \frac{4\pi^2 \cdot I_0}{C} + \frac{8\pi^2 M}{C} \cdot R_i^2. \qquad (\text{П.1.9})$$

Обозначим: $$Y_i = T_i^2, \quad X_i = R_i^2; \qquad (\text{П 1.10})$$

$$A = \frac{4\pi^2 \cdot I_0}{C}, \; B = \frac{8\pi^2 M}{C}. \qquad (\text{П.1.11})$$

Тогда уравнение (1.9) примет линейный вид: $Y_i = A + B \cdot X_i$. (П.1.12)

Построив экспериментальные результаты в системе координат (X,Y), можно оценить соответствие предлагаемой теоретической модели экспериментальной ситуации (насколько хорошо ложатся экспериментальные точки на прямую).

Для определения I_0 и упругой постоянной C достаточно определить коэффициенты A и B. Для этого обработаем экспериментальные данные методом наименьших квадратов.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sum\limits_{i=1}^{n} \left(Y_i - (A + B \cdot X_i)\right)^2}{\partial A} = 0 \\ \dfrac{\partial \sum\limits_{i=1}^{n} \left(Y_i - (A + B \cdot X_i)\right)^2}{\partial B} = 0 \end{cases}; \qquad (\text{П.1.13})$$

таким образом

$$\begin{cases} 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(Y_i - (A + B \cdot X_i)\right) = 0 \\ 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left[\left(Y_i - (A + B \cdot X_i)\right) \cdot X_i\right] = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i - n \cdot A - B \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i Y_i - A \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i - B \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \end{cases} \qquad (\text{П.1.14})$$

где n - число измерений. Выразим отсюда A и B:

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i - B \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} \\ B = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i Y_i\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right)^2 - n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2} \end{array}}, \text{ где } Y_i = T_i^2;\ X_i = R_i^2. \qquad (\text{П.1.15})$$

Найдя коэффициенты линейной регрессии A и B из формулы (1.15), легко получить значения C и I_0:

$$\boxed{C = \frac{8\pi^2 \cdot M}{B}}; \quad \boxed{I_0 = \frac{A \cdot C}{4\pi^2}} \qquad (П.1.16)$$

Вторая модель

Во второй модели учтем силы вязкого трения о воздух, действующие на баллистический маятник. Момент силы вязкого трения пропорционален угловой скорости и его можно представить следующим выражением:

$$M_{c\ opt} = -K \cdot \varphi_t'$$

Основное уравнение динамики вращательного движения, описывающее вращательное движение баллистического маятника, в этом случае примет вид:

$$I \cdot \varepsilon = M_{упр.} + M_{c\ opt}, \text{ то есть } I \cdot \varepsilon = -C\varphi - K\varphi_t',$$

где C - постоянная упругих сил кручения, K - коэффициент сил вязкого трения, φ - угол отклонения маятника от положения равновесия, $\varphi' = \omega$ - угловая скорость, $\varepsilon = \omega_t' = \varphi_t''$ - угловое ускорение, а I - момент инерции маятника.

Уравнение динамики вращательного движения можно переписать в виде:

$$\varphi_t'' + 2\delta\varphi_t' + \omega_0^2\varphi = 0, \qquad (П.2.1)$$

где $\delta = \dfrac{K}{2I}$ - коэффициент затухания, (П.2.2)

$\omega_0^2 = \dfrac{C}{I}$ - квадрат собственной частоты колебаний. (П.2.3)

Решением дифференциального уравнения второго порядка (П.2.1) при условии $\delta < \omega_c$ является функциональная зависимость угла от времени, описывающая затухающие колебания

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_s t + \alpha) \qquad (П.2.4)$$

с циклической частотой $\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (П.2.5)

и амплитудой $\varphi = \varphi_0 \cdot e^{-\delta t}$, (П.2.6)

зависящей от времени по экспоненциальному закону

Преобразуя уравнение (П.2.5) получим: $\omega_0^2 = \omega_s^2 + \delta^2$, (П.2.8)

то есть $\dfrac{C}{I} = \dfrac{4\pi^2}{T^2} + \delta^2$. (П.2.9)

На эксперименте можно измерить, как период колебаний - T, так и коэффициент затухания δ. Для этого достаточно измерить амплитуду начального отклонения - φ_0 и спустя n периодов - φ_n. В этом случае $\varphi_0/\varphi_n = \varphi_0/(\varphi_0 \cdot e^{-\delta n T}) = e^{\delta n T}$, то есть:

$$\delta = \ell n(\varphi_0/\varphi_n)/(n \cdot T) \qquad (П.2.10)$$

.10)

Естественно, что коэффициент затухания δ зависит от положения грузов, поэтому для различных положений грузов - R_i его значения будут различны - δ_i. Поэтому уравнение перепишется в следующем виде:

$$\frac{C}{I_0 + 2MR_i^2} = \frac{4\pi^2}{T_i^2} + \delta_i^2, \qquad (П.2.11)$$

где $I_0 + 2MR_i^2$ - момент инерции системы. Если ввести переменные:

$$\boxed{X_i = R_i^2}, \qquad \boxed{Y_i = \frac{1}{\left(\frac{4\pi^2}{T_i^2} + \delta_i^2\right)}} \qquad (П.2.12)$$

и обозначить констант . $A = I_0/C$, $B = 2M/C$, (П.2.13)

то это приведет к линеаризации уравнения (2.11) и оно примет вид:

$$Y_i = A + B \cdot X_i \ . \qquad (П.2.14)$$

Проведя измерения T_i и δ_i при различных положениях грузов R_i и рассчитав значения X_i и Y_i (П.2.12) методом наименьших квадратов, находим значения коэффициентов A и B (П.1.15) линейной регрессии. Из соотношений (П.2.13) находим значения I_0 и коэффициента упругих сил C:

$$\boxed{C = 2M/B}, \qquad \boxed{I_0 = A \cdot C} \qquad (П.2.15)$$

Однако, оценка значений δ_i и T_i для положения грузов R_i из одного опыта не является корректной. Поэтому целесообразно провести несколько (n=5-10) опытов для определения среднего значения этой величины и периода колебаний:

$$\langle\delta_i\rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}; \qquad \langle T_i\rangle = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}T_{ij} \qquad (П.2.16)$$

и оценки среднеквадратичной погрешности разброса

$$\boxed{\Delta\delta_i = t \cdot \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\langle\delta_i\rangle - \delta_{ij}\right)^2}{n\cdot(n-1)}}}, \qquad \boxed{\Delta T_i = t \cdot \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\langle T_i\rangle - T_{ij}\right)^2}{n\cdot(n-1)}}} \qquad (П.2.17)$$

где k - коэффициент Стьюдента для n измерений (при n=5, t=0.74; при n=10, t=0.70). **Внимание!** *Если* $\left|\langle\delta_i\rangle - \delta_{ij}\right| > 3\Delta\delta_i$, *то этот опыт можно считать промахом. В этом случае его надо повторить.*

Естественно, имея достаточно богатый экспериментальный материал, было бы жалко не воспользоваться методом для более точного определения коэффициентов линейной регрессии - "Методом наименьших квадратов с весовыми коэффициентами". В этом методе каждой точке экспериментальной зависимости приписывается весовой коэффициент, то есть какое-то число, пропорциональное нашему доверию к точности значения данной точки. Точность определения среднего значения $\langle Y_i\rangle$ будет тем меньше, чем больше погрешность измерения. Поэтому в качестве весового коэффициента можно использовать величину равную $\left(1/\Delta Y_i\right)^2$, где

$$\boxed{\Delta Y_i = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\Delta T_i\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \delta}\Delta \delta_i\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\Delta T^{\text{приб.}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \delta}\Delta \delta^{\text{приб.}}\right)^2}} \qquad (\text{П.2.18})$$

если считать, что погрешностью округления можно пренебречь.

В этом случае, сумма квадратов отклонений примет вид:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\langle Y_i\rangle - \left(A + B\cdot X_i\right)}{\Delta Y_i}\right)^2 \qquad (\text{П.2.19})$$

Это выражение эквивалентно выражению для величины χ^2, если бы ожидаемое значение величины ΔY зависело от X (что как правило и наблюдается в эксперименте). ***Поэтому значение суммы квадратов отклонений с весовыми коэффициентами (П.2.19) и есть значение величины χ^2, по которому определяется, исходя из критерия Пирсона, значимость данной теоретической модели.***

Наилучшими коэффициентами A и B будут коэффициенты, при которых величина χ^2 будет иметь минимальное значение, то есть экстремум:

$$\begin{cases}\partial S/\partial A = 0\\ \partial S/\partial B = 0\end{cases} \quad \text{таким образом} \quad \begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\langle Y_i\rangle - \left(A + B\cdot X_i\right)}{\Delta Y_i}\cdot\dfrac{-2}{\Delta Y_i}\right) = 0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\langle Y_i\rangle - \left(A + B\cdot X_i\right)}{\Delta Y_i}\cdot\dfrac{-2X_i}{\Delta Y_i}\right) = 0\end{cases} \qquad (\text{П.2.20})$$

то есть

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\langle Y_i\rangle/\Delta Y_i^2\right) - A\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1/\Delta Y_i^2\right) - B\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i/\Delta Y_i^2\right) = 0\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i\langle Y_i\rangle/\Delta Y_i^2\right) - A\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i/\Delta Y_i^2\right) - B\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i^2/\Delta Y_i^2\right) = 0\end{cases} \qquad (\text{П.2.21})$$

Выразим отсюда A и B:

$$\boxed{\begin{aligned} B &= \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\langle Y_i\rangle}{\Delta Y_i^2}\right)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i}{\Delta Y_i^2}\right) - \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{\Delta Y_i^2}\right)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i\langle Y_i\rangle}{\Delta Y_i^2}\right)\right)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i}{\Delta Y_i^2}\right)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i}{\Delta Y_i^2}\right) - \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{\Delta Y_i^2}\right)\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i^2}{\Delta Y_i^2}\right)\right)}\\ A &= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\langle Y_i\rangle/\Delta Y_i^2\right) - B\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i/\Delta Y_i^2\right)\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}\left(1/\Delta Y_i^2\right)\end{aligned}} \qquad (\text{П.2.22})$$

Найдя значения коэффициентов A и B (П.2.22) линейной регрессии, из соотношений (П.2.13) находим значения I_0 и коэффициента упругих сил C (П.2.15).

Приложение 2

Определение скорости пули при помощи баллистического маятника

Первая модель

При попадании пули в мишень с пластилином, баллистический маятник выходит из положения равновесия и совершает колебания вокруг своей оси. При этом считается, что *скорость пули в момент соударения перпендикулярна оси и плечу маятника. Если это условие не соблюдается, то кроме вращательных будут также возбуждаться и колебательные степени свободы маятника, то есть ось маятника начнет совершать колебания.*

Так как скорость пули перпендикулярна плоскости мишени, то момент импульса пули равен:

$$L = m \cdot \vartheta \cdot \ell,$$

где ℓ - расстояние от оси вращения маятника до точки удара пули, m - масса пули, ϑ - ее скорость.

Момент импульса системы после соударения определяется выражением: $L = I \cdot \omega$, где I - момент инерции системы после удара пули, равный $I = I_0 + 2MR^2 + m l^2$, моменту инерции маятника с пулей, ω - угловая скорость системы.

Удар можно считать абсолютно неупругим, так как при соударении с мишенью пуля застревает в пластилине, то есть скорости мишени и пули после соударения одинаковы. В этом случае закон сохранения момента импульса примет вид:

$$\boxed{m\vartheta \cdot \ell = I\omega} \qquad \text{(П.3.1)}$$

Таким образом, после соударения баллистический маятник будет вращаться с угловой скоростью ω. При движении маятника на него будет действовать момент силы, вызванный деформацией кручения стальной проволоки подвеса маятника, который равен $M = -C \cdot \varphi$, где C - постоянная упругих сил кручения, φ - угол отклонения маятника от положения равновесия. Поэтому в момент соударения угловая скорость будет максимальной.

Работа сил упругости при отклонении маятника от положения равновесия на угол будет равна:

$$A = \int_0^{\varphi} M\,d\varphi = -\int_0^{\varphi} (C\varphi)\,d\varphi = -\frac{C\varphi^2}{2}$$

Так как работа отрицательна, то потенциальная энергия маятника возросла на величину, равную работе, но противоположную по знаку, т.е.:

$$\Delta П = \frac{C\varphi^2}{2}$$

При отклонении маятника на максимальный угол вся энергия вращательного движения, которая равна $I\omega_{\max}^2/2$, переходит в потенциальную энергию, а изменение потенциальной энергии, как мы уже знаем, равно $C\varphi^2/2$. Таким образом, закон сохранения энергии мы можем записать в виде:

$$\boxed{\frac{I\cdot\omega_{\max}^2}{2}=\frac{C\cdot\varphi_{\max}^2}{2}}, \qquad (\text{П.3.2})$$

где φ_{max} - максимальный угол поворота маятника.

Используя законы сохранения момента импульса (П.3.1) и энергии (П.3.2), получаем:

$$\frac{I\cdot\left(\frac{m\cdot\vartheta\cdot\ell}{I}\right)^2}{2}=\frac{C\cdot\varphi_{\max}^2}{2},$$

отсюда:
$$\vartheta^2=\frac{CI}{m^2\ell^2}\cdot\varphi_{\max}^2.$$

То есть, скорость пули до столкновения с баллистическим маятником будет определяться выражением:

$$\boxed{\vartheta=\sqrt{CI}\cdot\frac{\varphi_{\max}}{m\ell}}. \qquad (\text{П.3.3})$$

Вторая модель

Во второй модели учтем силы вязкого трения, действующие на баллистический маятник, момент которых равен:

$$M_{c\ \text{опр}}=-K\cdot\varphi_t'.$$

В этом случае уравнение колебаний баллистического маятника (приложение 1, модель 2) при условии $\delta<\omega_0$ может быть представлено в виде (П.2.4):

$$\varphi=\varphi_0 e^{-\delta\cdot t}\cdot\cos(\omega_s t+\alpha). \qquad (\text{П.4.1})$$

Угловая скорость маятника равна первой производной от угла по времени:

$$\varphi_t'=\varphi_0\left[-\delta\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\cos(\omega_s t+\alpha)-\omega_s\cdot e^{-\delta\cdot t}\cdot\sin(\omega_s t+\alpha)\right]. \qquad (\text{П.4.2})$$

Рассмотрим начальные условия. Сразу после удара пули ($t=0$) угол отклонения баллистического маятника и угловая скорость соответственно равны:

$$\begin{cases}\varphi(0)=0=\varphi_0\cos\alpha\\ \varphi_t'(0)=-\varphi_0\cdot\left[\delta\cdot\cos(\alpha)+\omega_s\cdot\sin(\alpha)\right]\end{cases}. \qquad (\text{П.4.3})$$

Решая систему уравнений (4.3) получим, что в момент соударения угловая скорость равна:
$$\varphi_t'(0)=\varphi_0\omega_s=2\pi\varphi_0/T.$$

Отсюда
$$\varphi_0=\frac{\varphi_t'(0)\cdot T}{2\pi}. \qquad (\text{П.4.4})$$

Максимальное отклонение от положения равновесия баллистический маятник достигает в момент времени $t = T/4$. Оно равно (из (П.4.1)):

$$\varphi_{\max} = \left(\frac{\varphi_t'(0)\cdot T}{2\pi}\right)\cdot e^{-(\delta\cdot T/4)}. \qquad (П.4.5)$$

Отсюда угловая скорость баллистического маятника в момент времени непосредственно после соударения будет равна:

$$\varphi_t'(0) = \left(\frac{2\pi\varphi_{\max}}{T}\right)\cdot e^{(\delta T/4)}. \qquad (П.4.6)$$

Зная угловую скорость баллистического маятника после соударения можно определить скорость пули. Так как удар пули о мишень абсолютно неупругий (пуля застревает в мишени), то выполняется закон сохранения момента импульса:

$$m\cdot\vartheta\cdot\ell = I\cdot\varphi_t'(0),$$

где $I = I_0 + 2MR^2 + m\ell^2$ - момент инерции системы после удара пули.

Отсюда скорость пули после соударения равна:

$$\boxed{\vartheta = \frac{I}{m\ell}\cdot\left(\frac{2\pi\varphi_{\max}}{T}\right)\cdot e^{(\delta\cdot T/4)}}. \qquad (П.4.7)$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое момент импульса и как эта величина используется в лабораторной работе?
2. В чем заключается баллистический принцип?
3. Какие законы сохранения использовались в данной работе?
4. Что такое момент инерции?
5. Сформулируйте теорему Штейнера-Гюйгенса.
6. Как определить момент инерции баллистического маятника?
7. Как изменится угол отклонения баллистического маятника при соударении с пулей и период его колебаний, если увеличить его момент инерции?
8. Что произойдет, если пуля попадет под углом к перпендикуляру плоскости мишени?
9. Сформулируйте метод наименьших квадратов.
10. Сформулируйте метод наименьших квадратов с весовыми коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. М., "Наука". 1982.
2. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. М. "Высшая школа". 1989.
3. Зисман Г.А., Тодес Г.А. Курс общей физики. Киев, "Дніпро". 1994.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Луценко Евгений Викторович
Чопчиц Николай Игнатьевич
Гладыщук Анатолий Антонович

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ.
МЕХАНИКА.
Методические указания по выполнению
лабораторной работы М4
«Определение скорости пули при помощи крутильного
баллистического маятника»

Ответственный за выпуск Луценко Е.В.
Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 22.10.97 г. Формат 60×84/16. Печать офсетная. Усл. п. л. 1,1. Уч. изд. л. 1,25. Тираж 200 экз. Заказ № 596. Бесплатно. Отпечатано на ротапринте Брестского политехнического института. 224017, Брест, ул. Московская, 267.