СЕКЦИЯ 3. ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УДК 517.954

А. И. БАСИК, Е. В. ГРИЦУК, Т. А. ЯЦУК
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ОБ УСЛОВИИ РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ ЗАДАЧИ РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПО ДУГЛИСУ – НИРЕНБЕРГУ СИСТЕМ

В настоящей статье рассматривается множество эллиптических по Дуглису – Ниренбергу [1] систем двух дифференциальных уравнений с частными производными в пространстве $\mathbf{R}^n (n \geq 3)$ вида

$$\begin{cases} a_0 u + \sum_{j=1}^{n} b_j \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x_j} = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} c_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{j,k=1}^{n} d_{jk} \dfrac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_j \partial x_k} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_0, b_j, c_j, d_{jk} (j,k = 1,2,\dots,n)$ – заданные действительные числа, $u, v : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ – искомые функции. Эллиптичность системы (1) по Дуглису – Ниренбергу означает, что, во-первых, главная часть (1) имеет вид

$$A(\xi) = \begin{bmatrix} a_0 & \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j \\ \sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k & \sum_{j,k=1}^{n} d_{jk} \xi_j \xi_k \end{bmatrix},$$

т. к. существует набор чисел $s_1 = -1, s_2 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$, для которого выполняются неравенства $\deg a_{kj}(\xi) \leq s_k + t_j \ (k, j = 1, 2)$, и, во-вторых, для любого ненулевого вектора $\xi \in \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство $\det A(\xi) \neq 0$. Отметим, что рассматриваемое множество систем вида (1) имеет четыре компоненты гомотопической связности [2].

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 3)$ – ограниченная односвязная область, гомеоморфная шару, границей которой $\partial\Omega$ является гладкая $(n-1)$-мерная поверхность Ляпунова. Задача Римана – Гильберта состоит в отыскании пары функций $u \in C^1(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ и $\upsilon \in C^2(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей в области Ω системе уравнений (1) и граничному условию

$$g_1(y)u(y) + g_2(y)\upsilon(y) = f(y), \quad y \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $g_1, g_2, f : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции; $C^n(\Omega)$ – множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка n включительно; $C^{n,\alpha}(\overline{\Omega})$ – множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка n включительно, все частные производные которых до порядка n включительно допускают непрерывное продолжение на замыкание области, и продолжения всех производных непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0;1]$ в $\overline{\Omega}$.

Если $n = 2$ и система (1) представляет собой систему Коши – Римана, задача Римана – Гильберта (задача Гильберта в терминологии Ф. Д. Гахова [3]) является одной из основных краевых задач теории аналитических функций и достаточно подробно изучена (см. [3, с. 217] и имеющуюся там библиографию).

В трехмерном случае ($n = 3$), когда система (1) либо принадлежит классу трехмерных аналогов системы Коши – Римана [4], либо является эллиптической кососимметрической системой [5] или эллиптической системой ортогонального типа [6], для задачи Римана – Гильберта получено условие регуляризуемости, проведена гомотопическая классификация регуляризуемых задач и вычислен их индекс. При $n = 4$ известны примеры систем [7–10], обладающих свойством, что никакие граничные условия не могут образовать вместе с системой регуляризуемую краевую задачу.

Напомним, что краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполняется условие Я. Б. Лопатинского. Это условие накладывает дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и обеспечивает нетеровость краевой задачи как в классических пространствах, так и в широком классе гильбертовых пространств [1]. Последнее означает, что однородная задача (1), (2) имеет конечное число линейно независимых решений, а решение неоднородной задачи существует при выполнении конечного числа линейно независимых условий. В настоящей работе доказывается критерий регуляризуемости краевой задачи Римана – Гильберта (1), (2).

Теорема. *Краевая задача* (1), (2) *регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке* $y \in \partial\Omega$ *и при каждом ненулевом векторе* τ, *касательном к поверхности* $\partial\Omega$, *выполняется неравенство*

$$-g_1(y)b(\lambda_1\nu+\tau)+a_0g_2(y)\neq 0, \tag{3}$$

где $b(\xi)=\sum_{j=1}^{n} b_j\xi_j$, λ_1 *– корень уравнения* $\det A(\lambda\nu+\tau)=0$, *лежащий в верхней* λ*-полуплоскости,* ν *– единичный вектор внутренней нормали к* $\partial\Omega$ *в точке* y, $A(\xi)$ *– характеристическая матрица системы* (1).

Доказательство. Условие Я. Б. Лопатинского задачи (1), (2) состоит в том, что в каждой точке $y\in\partial\Omega$ и при каждом ненулевом векторе τ, касательном к $\partial\Omega$ в точке y, ранг матрицы

$$L(y;\tau)=\frac{1}{2\pi i}[g_1(y)\quad g_2(y)]\cdot\int_\gamma A^{-1}(\lambda\nu+\tau)(E,\lambda E)d\lambda \tag{4}$$

является максимальным, т. е. равным 1. В формуле (4) γ – простой гладкий замкнутый контур, лежащий в верхней λ-полуплоскости и охватывающий λ_1, E – единичная матрица второго порядка. Непосредственные вычисления показывают, что с точностью до ненулевого множителя

$$L(y;\tau)=(g_1(y)d(\lambda_1\nu+\tau)-g_2(y)c(\lambda_1\nu+\tau))e_1+(a_0g_2(y)-g_1(y)b(\lambda_1\nu+\tau))e_2,$$

где $e_1=(1;0;\lambda_1;0)$, $e_2=(0;1;0;\lambda_1)$, $c(\xi)=\sum_{j=1}^{n}c_j\xi_j$, $d(\xi)=\sum_{j,k=1}^{n}d_{jk}\xi_j\xi_k$.

Т. к. при любом $\lambda_1\in\mathbf{C}$ векторы e_1 и e_2 линейно независимы, то условие максимальности ранга матрицы (4) равносильно выполнению в каждой точке $y\in\partial\Omega$ и при каждом ненулевом векторе $\tau\in T_y\partial\Omega$ неравенства

$$|g_1(y)d(\lambda_1\nu+\tau)-g_2(y)c(\lambda_1\nu+\tau)|+|a_0g_2(y)-g_1(y)b(\lambda_1\nu+\tau)|\neq 0. \tag{5}$$

Очевидно, что если выполняется условие (3), то выполняется неравенство (5) и, следовательно, для задачи (1), (2) выполняется условие Я. Б. Лопатинского.

Обратное утверждение докажем методом от противного. Пусть задача (1), (2) регуляризуема и найдутся точка $y_0\in\partial\Omega$ и ненулевой вектор $\tilde\tau\in T_{y_0}\partial\Omega$ такие, что

$$-g_1(y_0)b(\lambda_1\nu+\tilde\tau)+a_0g_2(y_0)=0. \tag{6}$$

Выразив из формулы (6) $g_2(y_0)$ ($a_0 \neq 0$ в силу эллиптичности системы (1)), получим

$$g_1(y_0)d(\lambda_1 v + \tilde{\tau}) - g_2(y_0)c(\lambda_1 v + \tilde{\tau}) = g_1(y_0)\det A(\lambda_1 v + \tilde{\tau})/a_0 = 0,$$

что противоречит (5). Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волевич, Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем / Л. Р. Волевич // Мат. сб. – 1965. – Т. 68, № 3. – С. 373–416.

2. Басик, А. И. Гомотопическая классификация одного класса эллиптических по Дуглису – Ниренбергу систем двух уравнений в $\mathbf{R}^n (n \geq 3)$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Яцук //XIII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22–25 нояб. 2021 г. : в 2 ч. / сост. В. В. Лепин ; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики, Белгосуниверситет. – Минск : Беларус. навука, 2021. – Ч. 1. – С. 17–18.

3. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

4. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

5. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук. // Математика. Інформаційні технології. Освіта : зб. ст. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.

6. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$/ А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16.

7. Соломяк, М. З. О линейных эллиптических системах первого порядка / М. З. Соломяк // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 1. – С. 48–51.

8. Басик, А. И. О краевых задачах для систем Янушаускаса / А. И. Басик, А. Т. Усс // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 10. – С. 26–28.

9. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация четырехмерных аналогов системы Коши – Римана с действительными коэффициентами / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 5–9.

10. Басик, А. И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в $\mathbf{R}^4$/ А. И. Басик, А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.