УДК 519.2

И. Н. МЕЛЬНИКОВА, Э. М. БУТ-ГУСАИМ
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

БИНОМ НЬЮТОНА И ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Одним из проявлений увлеченности математикой является желание узнать, нет ли, кроме изученных, других подходов к решению задачи, доказательству теоремы, выводу формулы.

Так, например, хорошее понимание смысла и назначения формулы Бернулли о вероятности $P_n(m)$ иметь m успехов в n независимых испытаниях прокладывает прямую тропинку к доказательству справедливости формулы разложения бинома Ньютона $(a+b)^n$ для любых a, b и натурального n.

Пусть в n независимых испытаниях успех имеет место m раз с вероятностью p в каждом испытании и неудача имеет место $n-m$ раз с вероятностью $q=1-p$ в каждом испытании. По формуле $P_n(m)=C_m^n p^m q^{n-m}$ можно вычислить:

- $P_n(0)$ – вероятность события $A_0 - 0$ успехов в n испытаниях,
- $P_n(1)$ – вероятность события $A_1 - 1$ успех в n испытаниях,
- $P_n(2)$ – вероятность события $A_2 - 2$ успеха в n испытаниях и т. д.,
- $P_n(n)$ – вероятность события $A_n - n$ успехов в n испытаниях.

Ясно, что A_0, A_1, … , A_n – несовместные события и их объединение (сумма) образует достоверное событие, поэтому

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1. \tag{1}$$

Из $q=1-p \Rightarrow p+q=1$, откуда следует, что и

$$(p+q)^n = 1. \tag{2}$$

Сравнивая равенства (1) и (2), заключаем, что

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{3}$$

А это и есть формула разложения бинома Ньютона для частного случая $a+b=1$ при $0\le a\le 1$ и $0\le b\le 1$.

Обобщим формулу (3) сначала на случай произвольных положительных a и b. Сумму $a+b$ умножим и разделим на $c=a+b$. Тогда

$$(a+b)^n=c^n(a/c+b/c)^n.$$

Законно положить $a/c=p$ и $b/c=q$, т. к. $a/c<1$, $b/c<1$ и $(a+b)/c=1$. Тогда

$$(a+b)^n=c^n(p+q)^n=c^n\sum_{m=0}^{n}C_n^m p^m q^{n-m}=c^n\sum_{m=0}^{n}C_n^m\left(\frac{a}{c}\right)^m\left(\frac{b}{c}\right)^{n-m}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^m b^{n-m}.$$

После сокращения на c^n получаем: $(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^m b^{n-m}$, что и требовалось доказать для случая, когда a и b положительны.

Пусть теперь $a<0$ и $b<0$. Это значит, что $c=a+b$ также отрицательно, но $a/c=p$ и $b/c=q$ оба положительны, следовательно, выведенная формула бинома Ньютона имеет место и в случае отрицательных a и b.

Пусть, наконец, a и bразных знаков. Достаточно ограничиться дополнительным соглашением: $a+b>0$, откуда $a>-b$. Положим для определенности, что $a>0$, и выберем положительное c такое, что $-b<c<a$. Тогда $a+b=(a-c)+(b+c)$. Т. к. слагаемые в скобках оба положительные, то на основании доказанного $(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m(a-c)^m(b+c)^{n-m}$. Левая часть этого равенства не зависит от c, поэтому и в правой части после раскрытия скобок и приведения подобных членов останется только сумма $\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^m b^{n-m}$.

Осталось разобрать случай, когда хотя бы одно из чисел a или b равно нулю. Пусть, например, $b=0$. Тогда

$$\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^m b^{n-m}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^m 0^{n-m}=C_n^n...a^n 0^0=a^n=(a+0)^n=(a+b)^n,$$

т. к. $0^0=1$. Следовательно, формула разложения бинома Ньютона верна и в этом случае.