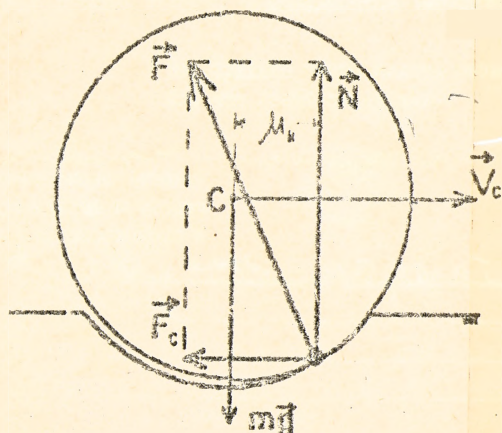


МНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛОРУСЬ

БРЕСТСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ. МЕХАНИКА.
Методические указания по выполнению лабораторной работы МВ
"НАКЛОННЫЙ МАЯТНИК"



УДК 53 (076.5)

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ. МЕХАНИКА.
Методические указания по выполнению лабораторной работы №3
"НАКЛОННЫЙ МАТРИК". Брест, БрПИ, 1993

В методических указаниях на примере наклонного маятника рассмотрены теоретические основы трения качения. Лабораторная работа может выполняться на четырех уровнях сложности в соответствии с теоретическими моделями изучаемого физического явления различной степени идеализации.

Предназначены для студентов всех специальностей и всех форм обучения в БрПИ.

Авторы: В.И. ГЛАДКОВСКИЙ, доцент, и.ф.-м.н., Т.А. НОВИКОВА,
ассистент, И.И. ЧОПЧИЦ, доцент, И.И. ШВЕЦ, ассистент.

Рецензент: В.М. КОСАРЕВ, доцент кафедры физики
БрПИ им. А.С. Пушкина.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50

ЛАБОРАТОРИАЛЬНАЯ РАБОТА № 6
"НАКЛОННЫЙ МАЯТНИК":

Надо верить, что ты многое можешь, -
Тогда многое станет возможным.

В.М. Борисов

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Экспериментальное определение среднего значения периода: $T_{\text{своб}}$ свободных колебаний; $T_{\text{крут}}$ крутильных колебаний (в зависимости от выбранной модели).
2. Экспериментальное определение зависимости периода кач (β) колебаний с качением наклонного маятника от значения угла наклона β плоскости колебаний.
3. Сравнение экспериментально установленной зависимости периода кач (β) колебаний с качением от значения угла наклона β плоскости колебаний с теоретическими моделями различной степени сложности.
4. Определение значения коэффициента трения μ_K качения.

ПРИБОРЫ И ПРИНАДЛЕЖНОСТИ: Установка для определения коэффициента трения качения ГТМ-01, набор пластин, шариков и пружин ей.

Что труднее всего видеть своими глазами?
То, что лежит перед нами.

И.В. Гете

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ:

Общий вид установки показан на Рис.3.1. К основанию (2), к которому прикреплены четыре ножки с регулируемой высотой, прикреплен секундомер ГТМ-14 (1). В основании закреплена труба (3), в которой смонтирован корпус (4) с червячной передачей. Соединением оси червячная передача соединена с кронштейном (5), к которому прикреплены шкала I (6) и шкала II (7). В кронштейне установлена колонка (8), на которой подвешен на нити шар с массой (9). В кронштейн (5) по направляющим вставляются пластины (10). Для наклона маятника используется вороток К кронштейну (5) привинчен фотоэлектрический датчик. В случае необходимости шары заменяются путем отвинчивания датчика и навешивания нового шара. Вид лицевой панели секундомера ГТМ-14 представлен на Рис.3.2:

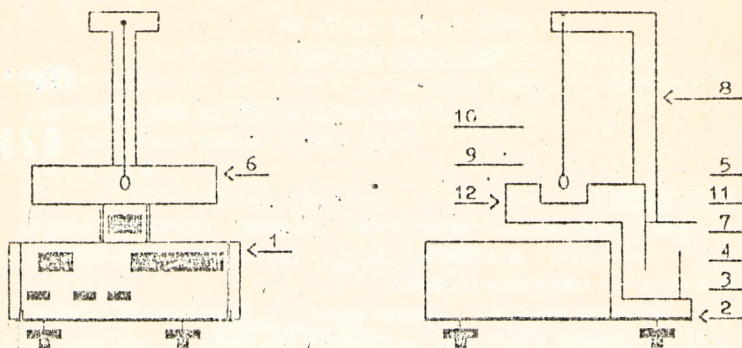


Рис.3.1. ОБЩИЙ ВИД УСТАНОВКИ.

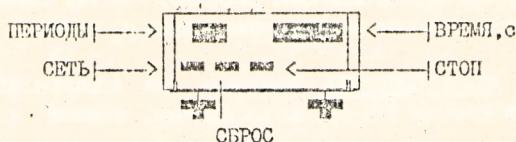


Рис.3.2. ЛИЦЕВАЯ ПАНЕЛЬ УСТАНОВКИ.

Люди недалекие обычно осуждают все, что выходит за пределы их понимания.

Ф.Ларошфуко

4. ПОДГОТОВКА ПРИБОРА К РАБОТЕ.

Для того, чтобы подготовить прибор к работе необходимо проделать следующие операции:

1. Освободить лабораторную установку от предохранительного полиэтиленового чехла (если он одет);
2. Проверить, отжата ли кнопка "СЕТЬ", после чего подсоединить шнур электропитания к розетке.
3. Нажать кнопку "СЕТЬ". При этом на табло прибора должны загореться индикаторные лампы;
4. Установить угол наклона $\beta=0$, т.е. установить плоскость качаний маятника вертикально. Установка угла наклона β производится при помощи маховичка с рукояткой;

5. Если маятник правильно установлен, то в положении равновесия нить маятника проходит через нулевую отметку шкалы отклонений; винтами регулировки уровня ОТГОРИЗОНТИРОВАТЬ установку так, чтобы при $\beta=0$ шарик едва соприкасался с поверхностью металлической пластинки.

Очень немногие люди, и при том самые замечательные, способны просто и откровенно сказать: "НЕ ЗНАЮ".

Д.И. Писарев

5.1 МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРИОДА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИИ.

Один из простейших способов определения периода свободных колебаний можно описать следующим образом: из теории вытекает что период малых колебаний не зависит от амплитуды. Поэтому вначале задайтесь уровнем относительной точности для периода в диапазоне $10^{-3}+10^{-4}$ с и определите рабочий диапазон угловых амплитуд, т.е. такое значение максимального угла отклонения ϕ_m , что при угловой амплитуде меньшей ϕ_m , относительная погрешность периода будет меньше выбранного значения уровня относительной точности для периода

1. Отведите маятник в любую сторону на некоторый небольшой угол, меньший ϕ_m ;

2. Отпустите маятник и пропустите несколько колебаний.

3. После этого нажмите кнопку "СБРОС" Если установка правильно работает, то на левом табло (с надписью "ПЕРИОДЫ") должны поочередно загораться цифры 1,2,3,...;

4. После нажатия кнопки "СТОП", например, во время индикации цифры "9", произойдет остановка на цифре "10". Это и есть число колебаний для данного случая. Ваша задача заключается только в том, чтобы определить затем ПЕРИОД КОЛЕБАНИИ по формуле:

$$T = t/n, \quad (5.1)$$

где t - время колебаний, а n - число колебаний (периодов).

5.2 МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ ПЕРИОДА КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИИ.

Период крутильных колебаний определяется следующим образом:

1. Устанавливают при помощи маховичка с рукояткой плоскость

наклонного маятника так, чтобы вращение шарика относительно вертикальной оси происходило беспрепятственно.

2. Закручивают нить шарика на один оборот и отпускают ее.

3. Замеряют при помощи секундомера время t n крутильных колебаний и затем вычисляют период по формуле (5.1).

5.3 МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИИ КАЧЕНИЯ.

Период колебаний с качением определяется следующим образом:

1. Устанавливают при помощи маховичка с рукояткой плоскость наклонного маятника на некоторый угол β .

2. Отводят шарик на небольшой угол α и отпускают его.

3. Пропуская 1-2 колебания, нажимают кнопку "СБРОС" и затем через n колебаний нажимают кнопку "СТОП", после чего вычисляют период по формуле (5.1).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Начиющему можно и нужно помочь учесть-
ся, но научиться он может только сам.

И.М. Франк

6.1 ВЫБОР ВОЗМОЖНОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Выбор модели осуществляется студентом самостоятельно. В данной работе используются три возможных теоретических модели. Все они подробно рассматриваются в ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ работы (§§ 8.1-8.4). В данном параграфе приводятся лишь краткие характеристики моделей и формулы, приспособленные для их проверки.

МОДЕЛЬ 1 используется в ситуации, когда при колебаниях наклонного маятника потенциальной энергией закручивания нити можно пренебречь. Комбинируя формулы (8.14) и (8.12), получим

$$T_{\text{неупр}}^2 = \frac{1,4}{\cos(\beta)} \cdot T_{\text{своб}}^2 \quad (6.1)$$

Введя обозначения $\alpha = 1,4 T_{\text{своб}}^2$ и $X = 1/\cos(\beta)$, получим следующую линейную зависимость

$$T_{\text{неупр}}^2 = \alpha X, \quad (6.2)$$

которую и следует проверять в МОДЕЛИ 1.

МОДЕЛЬ 2 используется в ситуации, когда при колебаниях

наклонного маятника потенциальной энергией закручивания нити пренебречь уже нельзя. Из теории, изложенной в §8.4, следует, что период колебаний с качением $T_{20}(\beta)$, период крутильных колебаний $T_{20}^{\text{КРУТ}}$ и период свободных колебаний $T_{20}^{\text{СВОБ}}$ связаны следующим соотношением (пропущенные выкладки проведите самостоятельно):

$$T_{20}^2(\beta) = \frac{1,4}{\frac{\cos(\beta)}{(T_{20}^{\text{СВОБ}})^2} + \frac{0,4}{(T_{20}^{\text{КРУТ}})^2}} \quad (8.3)$$

Из этой формулы получаем следующую формулу:

$$\frac{1,4}{T_{20}^2(\beta)} = \frac{\cos(\beta)}{(T_{20}^{\text{СВОБ}})^2} + \frac{0,4}{(T_{20}^{\text{КРУТ}})^2} \quad .$$

Вводя обозначения

$$y_{\text{упр}} = \frac{1,4}{T_{20}^2(\beta)}, \quad a = \frac{1}{(T_{20}^{\text{СВОБ}})^2}, \quad b = \frac{0,4}{(T_{20}^{\text{КРУТ}})^2}, \quad x = \cos(\beta)$$

получим линейную зависимость

$$y_{\text{упр}} = ax + b, \quad (8.4)$$

которая и подлежит экспериментальной проверке в МОДЕЛИ-2.

6.2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Сначала следует выбрать и согласовать с преподавателем проверяемую модель и число n измерений.

Для МОДЕЛИ-2: Определить по n раз период $T_{\text{СВОБ}}$ свободных колебаний и период $T_{\text{КРУТ}}$ крутильных колебаний.

Для МОДЕЛИ-1,2: Определить по n раз период $T_{\text{КАЧ}}(\beta)$ колебаний с качением для согласованного с преподавателем числа значений угла β , в пределах от 1 до 40° .

6.3 ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ

Верификация, т.е. проверка моделей производится в соответствии с алгоритмом, изложенным в §8.5.

Кто не идет вперед, тот идет назад; стоячего положения нет.

В.Г.Белинский

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Задание, сформулированное в данном параграфе, является дополнительным при работе с МОДЕЛЯМИ 1-2. Для определения коэффициента трения качения введем в рассмотрение МОДЕЛЬ-3. В этой модели учитывается, что в реальной экспериментальной установке вследствие наличия трения качения измеренное значение периода $T_{\text{кач}}(\beta)$ колебаний с качением отличается от значений, получаемых в МОДЕЛИ-2. В соответствии с формулой (8.8) имеем

$$\frac{\Delta T}{T_0^2} = \frac{25\mu_k^2 \cos^2(\beta)}{392 \pi^2 A_0^2 R^2} = \mu_k^2 \left(\frac{0,02}{A_0^2 R^2} \cos^2(\beta) \right). \quad (7.1)$$

Проверка этой зависимости и определение коэффициента трения качения и является целью экспериментов, проводимых в рамках этой модели.

Теоретические оценки, которые мы здесь не приводим, показывают, что величина $\Delta T/T_0$ имеет порядок $2 \cdot 10^{-3}$. Поэтому для выполнения этого упражнения влияние негармоничности колебаний должно быть значительно меньше, чем при проведении стандартных экспериментов, а для этого угловая амплитуда колебаний не должна превышать 5° .

Если работа производится в рамках МОДЕЛИ-1 вычислите значение $T_{2_{\text{своб}}}(\beta)$ с точностью до четырех десятичных знаков после запятой при всех значениях угла β по формуле

$$T_{2_{\text{своб}}}(\beta) = T_{\text{своб}} \sqrt{\frac{1 + \mu_k^2}{\cos(\beta)}}. \quad (7.2)$$

(Угловая амплитуда колебаний не должна превышать 5° !).

Если работа производится в рамках МОДЕЛИ-2 вычислите значение $T_{2_{\text{своб}}}(\beta)$ с точностью до четырех десятичных знаков после запятой при всех значениях угла β по формуле

$$T_{2_{\text{своб}}}(\beta) = \sqrt{\frac{T_0^2}{\cos(\beta)} + \frac{0,4}{(T_{2_{\text{своб}}})^2} + \frac{0,4}{(T_{2_{\text{своб}}})^2}}. \quad (7.3)$$

(Угловая амплитуда колебаний и в этом случае не должна превышать 5° !).

Далее найдите разности $\Delta T(\beta)$ при всех значениях угла β между экспериментальными и теоретическими значениями периода

колебаний качения. Найдите далее величины $Y_i = \frac{\Delta T(\beta_i)}{T_{20}^2(\beta_i)}$. В соответствии формулой (7.1) обозначаем $X = \frac{0,02}{A_0^2(\beta)R^2} \cos^2(\beta)$ и строим зависимость $Y=AX$, где $A=\mu_K^2$. Наилучшее в смысле метода наименьших квадратов значение A определяется по формуле

$$A = \frac{\sum Y_i X_i}{\sum X_i^2}.$$

Значение коэффициента трения определяется тогда по формуле

$$\mu_K = \sqrt{A}. \quad (7.4)$$

ПРИМЕЧАНИЕ. При определении экспериментальных значений $T_{\text{кач}}(\beta)$ при различных β угловая амплитуда колебаний не должна превышать 5° . Поскольку при больших β колебания быстро затухают и, кроме того, требуется одновременное определение начальных линейных амплитуд $A_0(\beta)$, рекомендуется следующий порядок работы. Отклоните маятник максимального отклонения влево или вправо, отпустите его и отожмите кнопку "СТОП". Следите за величиной максимального отклонения шарика. В тот момент, когда оно становится меньше 5° , зафиксируйте его значение ϕ_{1m} и нажмите кнопку "СБРОС". После 2-3 колебаний нажмите кнопку "СТОП". Определите значение периода и вычислите соответствующее значение линейной амплитуды $A_0 = L\phi_{1m}$.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Поскольку идеализация задачи всегда неизбежна, прежде всего возникает вопрос о том, как далеко мы можем идти в этом направлении, до какой степени можно идеализировать свойства системы и все же получать удовлетворительные результаты. Ответ на этот вопрос может дать в конечном счете только опыт. Только сопоставляя те ответы, которые дает на тот или иной вопрос наше идеализированное рассмотрение, с результатами опыта, мы можем судить ЗАКОННА ли та или иная идеализация.

А.Андронов, А.Витт, С.Хайкин

8.1 ТРЕНИЕ ПРИ КАЧЕНИИ ТЕЛ

Рассмотрим шар массой m и радиусом R , вращающийся вокруг горизонтальной оси, проходящей через неподвижный центр масс C . Точки на окружности сечения шара вертикальной плоскостью имеют скорость $V_0 = \omega_0 R$. Направления этих скоростей для верхней и нижней точек показаны на Рис.8.1. Сообщим центру шара скорость

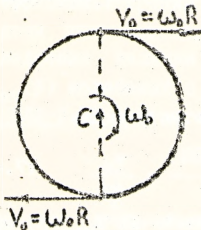


Рис.8.1.

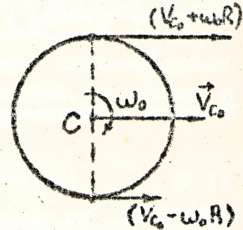


Рис.8.2.

\rightarrow V_{C_0} относительно исходной системы отсчета (СО). Тогда скорости

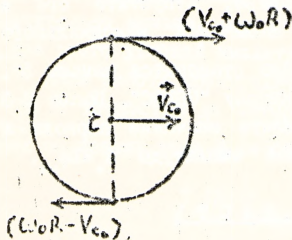


Рис.8.3.

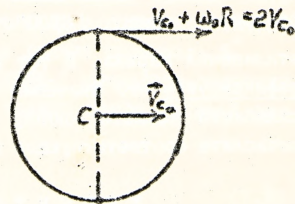


Рис.8.4.

различных точек указанного сечения относительно исходной СО находятся векторным суммированием скорости \vec{V}_{C_0} со скоростями бо вращательном движении. Для верхней и нижней точек для случая $V_{C_0} > \omega_0 R$ они показаны на Рис.8.2, для случая $V_{C_0} < \omega_0 R$ - на Рис.8.3, а при $V_{C_0} = \omega_0 R$ - на Рис.8.4. При $V_{C_0} = \omega_0 R$ скорость нижней точки в исходной СО обращается в нуль.

Возьмем, например, шар, показанный на Рис.8.2, и положим его без толчка на горизонтальную шероховатую неподвижную опору. На нижнюю точку кроме силы нормальной реакции опоры \vec{N} начинает

действовать сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$ (Рис.8.5). Эта сила приводит к уменьшению скорости центра масс C по закону

$$V_C = V_{C_0} - (F_{\text{тр}}/m)t = V_{C_0} - \mu gt.$$

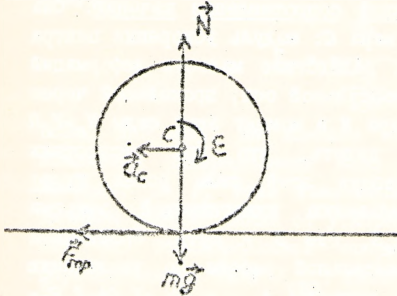


Рис.8.5.

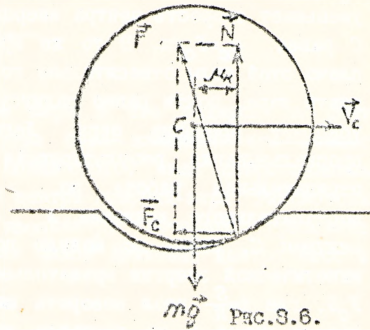


Рис.8.6.

С другой стороны, относительно оси, проходящей через центр C , эта сила имеет момент $M_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}R = \mu mgR$, увеличивающий угловую скорость по закону $\omega = \omega_0 + \epsilon t = \omega_0 + (M_{\text{тр}}/J_C)t = \omega_0 + (\mu mgR/J_C)t$, где $J_C = \frac{2}{5}mR^2$ - момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс. В тот момент, когда начинает выполняться условие $V_C = \omega R$ скорость нижней точки обращается в нуль (как на Рис.8.4), проскальзывание нижней точки по поверхности прекращается и начинается чистое качение. В этот момент сила трения в идеализированном рассматриваемом случае обращается в нуль и шар в дальнейшем движется равномерно.

Опыт показывает, однако, что в действительности движение шара без проскальзывания является замедленным и в конце концов он останавливается. Причиной этого является не учитывавшаяся выше так называемая сила сопротивления качению. Ее природа, как, впрочем, и природа всех сил трения вообще, очень сложна, поэтому ограничимся лишь самыми общими сведениями. При качении контакт между шаром и опорой происходит вследствие деформаций не в одной точке, а вдоль некоторой площади. Эти деформации вследствие явления так называемого упругого гистерезиса, оказываются несимметричными относительно вертикали, проходящей через центр шара, и поэтому сила реакции опоры \vec{F} , которую как обычно можно представить в виде суммы двух составляющих - вдоль опоры и перпендикулярно к ней: $\vec{F} =$

$\vec{N} + \vec{F}_C$ направлена так, как показано на Рис.8.6, на котором показана для простоты деформированной лишь опора в сильно преувеличенном для наглядности виде. Горизонтальная составляющая \vec{F}_C силы реакции \vec{F} называется силой сопротивления качению. Она уменьшает скорость центра инерции шара C : модуль ускорения центра C равен $a_C = F_C/m$. В то же время вследствие малости деформаций плечо этой силы относительно горизонтальной оси, проходящей через центр шара, почти равно радиусу шара R и момент этой силы $M_C = F_C R$ ускоряет вращение шара. Легко видеть, что при отсутствии проскальзывания результирующая работа этой силы равна нулю: отрицательная работа по уменьшению кинетической энергии поступательного движения $A_{\text{пост}} = -F_C S$, где S - путь, пройденный центром C , равна по модулю положительной работе по увеличению кинетической энергии вращательного движения $A_{\text{вращ}} = M\phi = F_C S\phi = F_C R \frac{S}{R} = F_C S$, где $\phi = \frac{S}{R}$ - угол поворота шара. Поэтому сила F_C подобна силе трения покоя и не является диссипативной. Требуемое условием отсутствия проскальзывания замедление вращения шара, согласованное с уменьшением скорости его центра, обеспечивается тем, что нормальная реакция \vec{N} при качении оказывается смещенной вперед по направлению движения относительно вертикальной оси, проходящей через центр шара.

Плечо этой силы относительно горизонтальной оси, проходящей через центр шара, обозначается через μ_k и называется коэффициентом трения качения. Опыт показывает, что в первом приближении величина μ_k не зависит от скорости и радиуса шара и определяется лишь свойствами материалов шара и опоры. Значения μ_k для различных пар материалов обычно приводятся в виде таблиц. Обратите внимание: μ_k является размерной величиной и имеет размерность длины: $[\mu_k] = \text{м}$. Именно момент силы \vec{N} согласованно с уменьшением скорости уменьшает угловую скорость вращения ω , следовательно, совершает отрицательную работу по уменьшению кинетической энергии вращательного движения шара. Что касается силы \vec{F}_C , то она зависит не только от силы \vec{N} и материалов шара и опоры подобно, например, силе трения скольжения, но и от других величин. Действительно, в рассматриваемом выше случае из условия отсутствия проскальзывания следует, что $a_C = \omega R$. Таким образом,

$$\frac{F_C}{m} = \frac{N\mu_k - F_C R}{J_C} R.$$

откуда

$$F_C = \frac{N\mu_k/R}{\frac{J_C}{mR^2} + 1}.$$

Если, например, не изменяя массы шара и его радиуса за счет изменения распределения масс внутри шара изменить его момент инерции, то F_C тоже изменится. Более того, сила сопротивления качению зависит также от ускорения центра инерции шара. Рассмотрим шар на горизонтальной опоре, к центру которого приложена горизонтальная сила $F_{гор}$. Записывая закон движения центра масс и

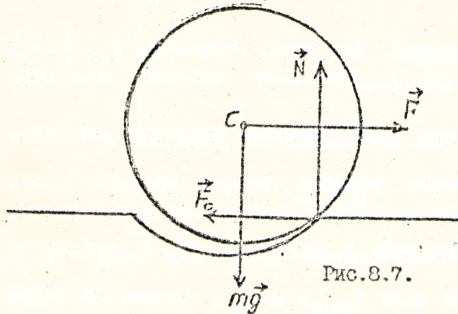


Рис. 8.7.

основное уравнение динамики вращательного движения вокруг проходящей через него горизонтальной оси, получим для модулей ускорения центра a_C и углового ускорения ϵ следующую систему:

$$\begin{cases} a_C = \frac{F - F_C}{m}, \\ F_C R - \mu_k N = J_C \epsilon. \end{cases}$$

Решая систему с учетом соотношения $a_C = \epsilon R$; получим

$$a_C = \frac{F - \mu_k N/R}{m \left(1 + \frac{J_C}{mR^2} \right)} \quad (8.1)$$

$$F_C = F \frac{J_C' / mR^2}{I + J_C' / mR^2} + \frac{(mR N) / (mR)}{I + J_C' / mR^2} \quad (8.2)$$

т.е. действительно F_C зависит от внешней силы F , определяющей ускорение центра C . Это обстоятельство отличает силу F_C от всех прочих сил, изучаемых в механике, которые определяются только взаимным расположением и скоростями тел и не зависят непосредственно друг от друга. Введем величину

$$m_0 = m \left(I + \frac{J_C}{mR^2} \right)$$

и назовем ее эффективной массой. Для шара, например, $J_C = \frac{2}{5} mR^2$ и $m_0 = \frac{7}{5} m$. Тогда формула (8.1) позволяет сделать следующие заключения.

Ускорение центра масс при чистом качении шара под действием некоторой силы \vec{F} , линия действия которой проходит через центр, такое же, как и поступательно движущегося тела с массой m_0 , на которое дополнительно к силам $\vec{m}g$, \vec{N} , \vec{F} действует противоположная скорости сила $F_{\text{тр.к}} = \mu \frac{N}{R}$, называемая силой трения качения.

Сформулированное утверждение позволяет автоматически переносить результаты анализа поступательного движения, которые получить обычно значительно проще, на случай чистого качения. (На путайте силу трения качения $F_{\text{тр.к}} = \mu \frac{N}{R}$ с силой сопротивления качению, определяемой формулой (8.2).)

Завершая разговор о качении заметим, во-первых, что изложенная теория применима также для качения цилиндра и во-вторых, что данная теория не учитывает тонкие детали механизмов взаимодействия тел при качении: при деформациях тел фактически имеет место микроскопическое проскальзывание поверхностей тел друг относительно друга, приводящее к рассеянию энергии (напомним, что при чистом качении микроскопические проскальзывания отсутствуют), имеют место неупругие деформации и т.д.

Если бы печатали только полезное,
то было бы во сто раз менее книг.

Ф. Вольтер

8.2 КОЛЕБАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ СИЛ, ПРотивОПОЛОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЮ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим колебания одномерного осциллятора, на который кроме квазиупругой силы действует постоянная по модулю сила, направление которой противоположно скорости движения. Простейшим примером могут служить колебания груза массой m на пружине с коэффициентом упругости k при наличии сухого трения между грузом и опорой (Рис.8.8). Выбирая начало координат в положении равновесия тела в

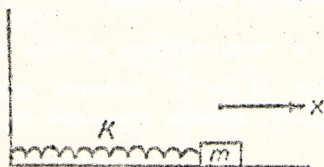


Рис.8.8.

отсутствие трения (т.е. когда пружина недеформирована), имеем при движении вправо

$$m \ddot{x} = -kx - F \quad \text{при } V_x > 0, \quad (8.3)$$

а при движении влево

$$m \ddot{x} = -kx + F \quad \text{при } V_x < 0. \quad (8.4)$$

Конечно, в случае, показанном на Рис.8.8, сила $F = \mu mg$, но в целях общности рассмотрения это соотношение дальше использоваться не будет. Обозначим $\frac{k}{m} = \omega_0^2$. Тогда ω_0 имеет смысл циклической частоты колебаний в отсутствии силы F , а $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ - периода колебаний в этом случае. Пусть $A_0 > 0$ - начальное отклонение тела, а его начальная скорость равна нулю. Если $kA_0 - \mu^2 A_0^2 < F$, т.е. сила упругости меньше силы трения, то колебания вообще не начинаются.

Обозначим $\frac{F}{m\omega_0^2} = \epsilon$. Область значений координаты x : $-\epsilon \leq X \leq \epsilon$ определяет так называемую ЗОНУ ЗАСТОЯ. Если тело останавливается в области застоя, то дальнейшее движение прекращается. Будем предполагать, поэтому, что $A_0 > \epsilon$. Решение уравнения (8.4) при начальном условии $x = A_0$, $V_x = 0$ при $t=0$ имеет вид

$$X_{\leftarrow} = (A_0 - \epsilon) \cos(\omega_0 t) + \epsilon. \quad (8.5)$$

Таким образом, при движении ВЛЕВО закон движения в точности совпадает с законом движения при гармоническом колебании с периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ и амплитудой $(A_0 - \epsilon)$, совершающимися около положения равновесия в точке с координатой $\epsilon = \frac{F}{m\omega_0^2}$. При $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$ имеем $\bar{X}_1 = -A_0 + 2\epsilon$ и скорость тела в этот момент времени обращается в нуль. Если $|\bar{X}_1| > \epsilon$, начнется движение ВПРАВО, описываемое уравнением (8.3). Решение уравнения (8.3) при условии $X = \bar{X}_1$ при $t = t_1$ имеет вид

$$X_{\rightarrow} = (A_0 - 3\epsilon) \cos(\omega_0 t) - \epsilon. \quad (8.6)$$

Уравнение (8.6) описывает гармонические колебание около положения равновесия $X = -\epsilon$ с тем же периодом $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ и МЕНЬШЕЙ амплитудой $(A_0 - 3\epsilon)$. При $t_2 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2t_1$ имеем $\bar{X}_2 = \bar{X}_1 = A_0 - 4\epsilon$ и если $\bar{X}_2 > \epsilon$, начинается опять движение влево (второе по счету) по закону

$$X_{\leftarrow} = (A_0 - 5\epsilon) \cos(\omega_0 t) + \epsilon, \quad (8.7)$$

определяющему гармоническое колебание с амплитудой $(A_0 - 5\epsilon)$ около положения равновесия $X = \epsilon$ и т.д.

График зависимости X от t получается последовательным сшиванием участков косинусоид:

- участок 1-2 - косинусоида, симметричная относительно прямой $X = \epsilon$, с амплитудой $(A_0 - \epsilon)$;
- участок 2-3 - косинусоида, симметричная относительно прямой $X = -\epsilon$ с амплитудой $(A_0 - 3\epsilon)$;
- участок 3-4 - косинусоида, симметричная относительно прямой $X = \epsilon$, с амплитудой $(A_0 - 5\epsilon)$ и т.д.

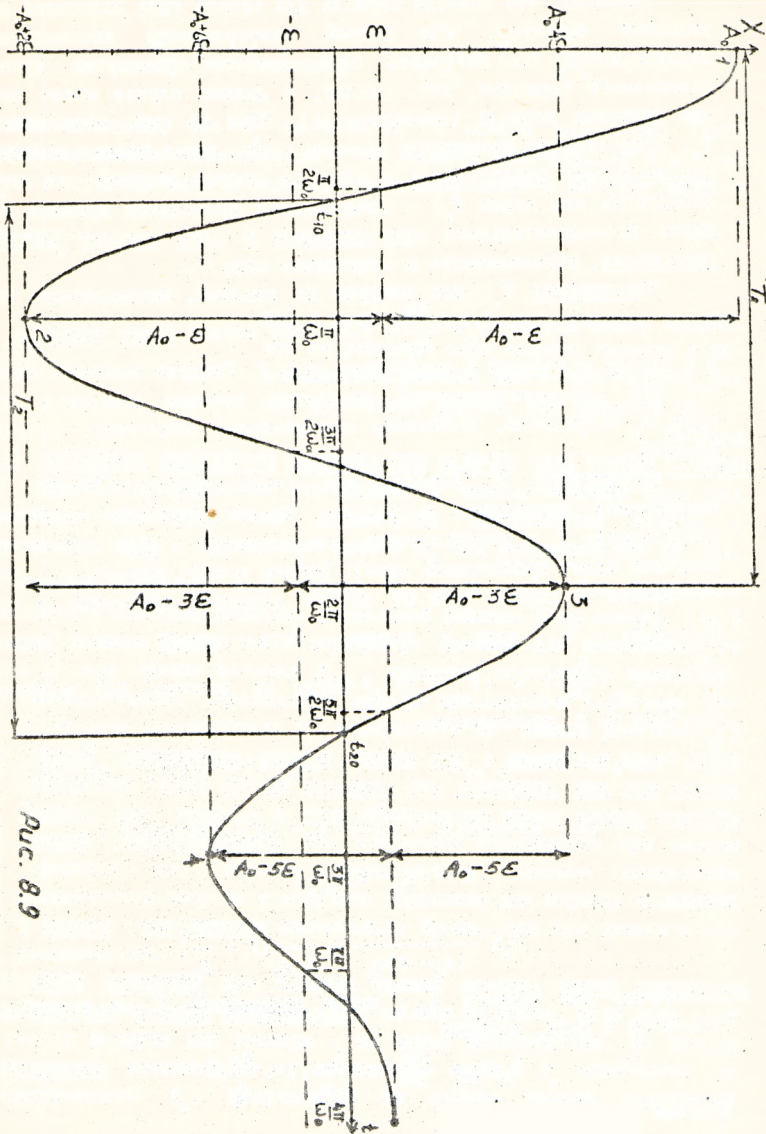


Рис. 8.9

Очевидно, что понятие периода для такого типа колебаний носит условный характер, ибо полной повторяемости кинематических характеристик по истечении определенного промежутка времени, называемого периодом, нет. Однако, в данном случае можно ввести два условных периода (квазипериода). Один из них, обозначим его T_1 , представляет промежуток времени между двумя последовательными максимальными отклонениями в одну (в любую) сторону, а второй (обозначим его через T_2) - представляет промежуток времени между двумя последовательными прохождениями в одну сторону положения равновесия, определяемого в отсутствие силы F .

Квазипериод T_1 , как следует из анализа, проведенного выше, будет равен периоду $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, т.е. этот период будет таким же, как и в случае колебаний в отсутствие силы F . Следует заметить однако, что при автоматизированном измерении времени измерение этого периода затруднено, поскольку максимальные отклонения постоянно убывают.

Квазипериод T_2 определяется очень просто. Именно этот квазипериод измеряется в работе. Найдем выражение для этого квазипериода T_2 в предположении, что величина ε мала (оценка этой величины будет произведена ниже). Найдем момент времени t_{10} , когда координата X первый раз от начала движения обратится в нуль. Поскольку ε мало, должна быть малой и разность

$\delta_1 = (t_{10} - \frac{\pi}{2\omega_0}) = (t_{10} - T_0/4)$. Тогда из условия $X=0$ получим в линейном по δ_1 приближении:

$$0 = (A_0 - \varepsilon) \cos(\omega_0 t_{10}) + \varepsilon = \varepsilon + (A_0 - \varepsilon) \cos\left[\omega_0 \left(\delta_1 + \frac{\pi}{2\omega_0}\right)\right] =$$

$$\varepsilon + (A_0 - \varepsilon) \cos(\omega_0 \delta_1 - \frac{\pi}{2}) = \varepsilon - (A_0 - \varepsilon) \sin(\omega_0 \delta_1) \approx$$

$$\varepsilon - (A_0 - \varepsilon) \omega_0 \delta_1,$$

откуда

$$\delta_1 \approx \frac{\varepsilon}{(A_0 - \varepsilon) \omega_0} \approx \frac{\varepsilon}{A_0 \omega_0} \left(1 + \frac{\varepsilon}{A_0}\right).$$

Аналогично для момента t_{20} , когда координата X во второй раз обратится в нуль, получим

$$\delta_2 = t_{20} - \frac{5\pi}{2\omega_0} \approx \frac{\varepsilon}{A_0 \omega_0} \left(1 + \frac{5\varepsilon}{A_0}\right).$$

Искомый квазипериод

$$T_2 = t_{20} - t_{10} = \frac{2\pi}{\omega_0} + \frac{4\epsilon^2}{A_0^2 \omega_0} = T_0 + \frac{4\epsilon^2}{A_0^2 \omega_0}$$

Можно показать, что T_2 не зависит от номера колебания. Таким образом, отличие квазипериода T_2 от периода незатухающих колебаний T_0 в отсутствие силы F является величиной второго порядка малости по $\left(\frac{\epsilon}{A_0}\right)$.

Мир в наши дни так быстро движется вперед, что не успевает один человек заявить о возможности решения какой-либо задачи, как его перебивает другой, уже решивший ее.

Э. Хаббард

В.3 КОЛЕБАНИЯ НАКЛОННОГО МАЯТНИКА ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЫ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ

Выше было показано, что задача о чистом качении бара под действием некоторых сил динамически эквивалентна задаче о скольжении тела с эффективной массой m_0 под действием тех же сил, к которым добавлена сила трения $F_{тр.к} = \mu \frac{N}{R}$. При колебаниях наклонного маятника величина нормальной реакции $N = mg \cos(\beta)$, где β - угол наклона плоскости к горизонту. Поэтому для фиксированного угла β сила трения качения $F_{тр.к}$ является постоянной величиной.

Следовательно, справедливы выводы предыдущего параграфа относительно квазипериода T_2 , измеряемого на данной установке. В первом приближении период такой же, каким он был бы в отсутствие силы трения качения. Это означает, что при выводе формулы для периода в этом приближении можно вообще считать трение отсутствующим. Это открывает возможность при выводе формулы для периода пользоваться законом сохранения механической энергии и получить выражение для периода колебаний в первом приближении значительно проще, чем при динамическом рассмотрении.

ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ! При наличии трения качения закон сохранения механической энергии несправедлив, но тем не менее, если речь идет о выводе формулы для периода - им можно пользоваться. Во втором приближении истинный, т.е. измеренный период T_2 отличается от теоретического T_0 , получаемого на основе закона сохранения

механической энергии на величину ΔT :

$$\Delta T = T_2 - T_0 = \frac{4\varepsilon^2}{A_0^2 \omega_0}$$

где $\varepsilon = \frac{F}{mg_0} = \frac{\mu_k \frac{N}{R}}{\frac{2}{R}}$. Учитывая, что для шара $m_e = \frac{7}{5}m$ и

$N = mg \cos(\beta)$, получим

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{25 \mu_k^2 g^2 \cos^2(\beta) T_0^4}{392 \pi^2 A_0^2 R^2} \quad (8.8)$$

8.4. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЗАВИСИМОСТИ ПЕРИОДА $T_0(\beta)$ КОЛЕБАНИИ КАЧЕНИЯ ШАРОВОГО МАЯТНИКА ОТ УГЛА β НАКЛОНА МАЯТНИКА.

Как указано в §§ 8.2, 8.3 в первом приближении квазипериод T_2 колебаний наклонного маятника при чистом качении не зависит от наличия трения качения. Обозначим это значение периода T_{20} и найдем выражение для T_{20} , пользуясь законом сохранения механической энергии. Пусть L - расстояние от точки подвеса до центра C шарового маятника; φ - угол отклонения нити от положения равновесия.

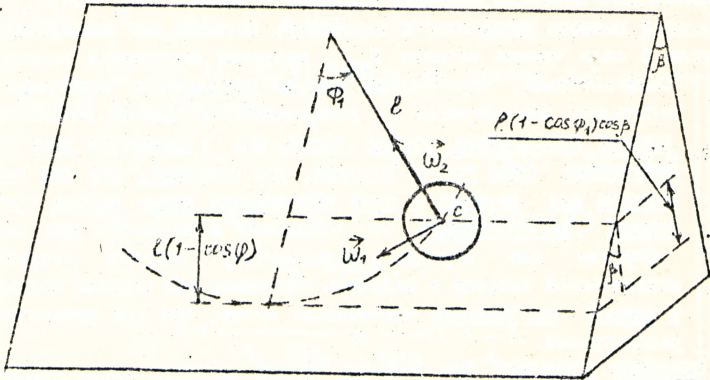


Рис. 8.10.

Угловая скорость поворота нити равна $\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$, а линейная скорость перемещения центра инерции $V_C = L\dot{\varphi}_1$. Согласно теореме

Кинетическая энергия шарика складывается из кинетической энергии поступательного движения $\frac{m v_C^2}{2}$ его центра инерции и кинетической энергии вращательного движения $\frac{J_C \omega^2}{2}$ шарика вокруг оси, проходящей через центр шара параллельно нити, где $J_C = \frac{2}{5} m R^2$ - момент инерции шара относительно той же оси, m - масса шарового маятника, R - его радиус, ω - угловая скорость вращения. Это вращение шара представляет собой сложное явление ибо, во-первых, он вращается с некоторой угловой скоростью ω_2 вокруг оси, совпадающей с нитью, и, во-вторых, сама нить, продолжение которой будем считать проходящим через центр шара (на самом деле это не совсем точно, но мы этот вопрос обсуждать не будем), поворачивается с угловой скоростью ω_1 - с этой же угловой скоростью поворачивается и радиус шара, проведенный в точку крепления нити. Векторы угловых скоростей $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ для случая $\dot{\phi}_1 > 0$ показаны на рис. 8.8 (вектор $\vec{\omega}_2$ перпендикулярен наклонной плоскости). Поскольку $\vec{\omega}_1 \perp \vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$, то $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$. В отсутствие проскальзывания согласно § 8.1 $\omega_2 = \frac{v_C}{R} = \frac{L}{R} \dot{\phi}_1$. Тогда кинетическая энергия шара равна

$$E_k = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{J_C (\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2} = \frac{m (L \dot{\phi}_1)^2}{2} + \frac{\frac{2}{5} m R^2 \dot{\phi}_1^2 (1 + \frac{L^2}{R^2})}{2} = \dot{\phi}_1^2 \frac{m}{2} (1,4L^2 + 0,4R^2).$$

При повороте нити на угол ϕ_1 центр C шара поднимается над над наинизшим положением на высоту $L(1 - \cos \phi_1) \cos \beta$ (рис. 8.8). Полагая потенциальную энергию шарика в наинизшем положении равной нулю, потенциальную энергию в положении, определяемом углом ϕ_1 , запишем в виде $mgL(1 - \cos \phi_1) \cos \beta$. Будем считать, далее, что масса нити пренебрежимо мала в сравнении с массой шарика и что нить нерастяжима. (Это позволяет пренебречь потенциальной энергией нити в поле силы тяжести потенциальной энергией деформации растяжения нити). При качении шарика нить, однако, закручивается. Если при этом возникают силы упругости, то нужно учесть также потенциальную энергию деформации кручения $\frac{f}{2} \phi_2^2$, где f - некоторая постоянная, характеризующая упругие свойства нити при кручении (модуль упругости кручения нити), ϕ_2 - угол закручивания нити.

Угол ϕ_2 можно определить следующим образом. Умножив обе части соотношения $\omega_z = \frac{L}{R} \dot{\phi}_1$ на dt и проинтегрировав, получим $\phi_2 = \frac{L}{R} \phi_1 + \text{CONST}$. Считая, что в положении равновесия ($\phi_1=0$) нить не закручена ($\phi_2=0$), получим, что $\text{CONST}=0$. Учитывая также, что в стандартном приближении малых колебаний ($\sin\phi_1 \approx \phi_1$), имеем $1 - \cos\phi_1 = 2\sin^2\left(\frac{\phi_1}{2}\right) \approx 2\left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2 = \frac{\phi_1^2}{2}$. Потенциальную энергию системы запишем в виде

$$E_{II} = mgL\cos\beta \frac{\phi_1^2}{2} + \frac{II^2}{2R} \dot{\phi}_1^2 = \frac{\phi_1^2}{2} \left(mgL\cos\beta + \frac{II^2}{2R} \right).$$

Полная механическая энергия системы

$$E = E_K + E_{II} = \dot{\phi}_1^2 \frac{m}{2} (I,4I^2 + 0,4R^2) + \frac{\phi_1^2}{2} \left(mgL\cos\beta + \frac{II^2}{2R} \right)$$

в отсутствие диссипативных сил является величиной постоянной. Дифференцируя последнее соотношение по времени, получим

$$2\dot{\phi}_1 \ddot{\phi}_1 \frac{m}{2} (I,4I^2 + 0,4R^2) + 2\dot{\phi}_1 \frac{\phi_1}{2} \left(mgL\cos\beta + \frac{II^2}{2R} \right) = 0.$$

Поскольку $\dot{\phi}_1$ не равно тождественно нулю, имеем уравнение

$$\ddot{\phi}_1 + \frac{\left(mgL\cos\beta + \frac{II^2}{2R} \right)}{m(I,4I^2 + 0,4R^2)} \phi_1 = 0. \quad (8.9)$$

Сравнивая (8.9) со стандартным дифференциальным уравнением гармонических колебаний $\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$, где $\omega = 2\pi/T_0$, T_0 - период колебаний, получим для периода колебаний наклонного шарового маятника в первом приближении следующее выражение:

$$T_{z_0}(\beta) = 2\pi \sqrt{\frac{m(I,4I^2 + 0,4R^2)}{mgL\cos(\beta) + \frac{II^2}{R}}} \quad (8.10)$$

Формулу (8.10) можно упростить применительно к условиям реальных экспериментов. Так, пренебрегая величиной R по сравнению с L , из (8.10) получим:

$$T_{\text{ш}}(\beta) = 2\pi \sqrt{\frac{1,4mL^2}{mgL\cos(\beta) + \frac{L^2}{R^2}}} \quad (8.11)$$

Если повторить все выкладки, приведенные выше в этом параграфе, в ситуации, когда $\beta=0$ и шарик не касается опоры и учесть, что при этом шарик не вращается и нить не закручивается, то для периода малых колебаний получим известное из школьного курса выражение:

$$T_{\text{ш}}^{\text{своб}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (8.12)$$

Рассмотрев по аналогии крутильные колебания шарика на нити подвеса при $\beta=0$ в отсутствие контакта с опорой, получим

$$T_{\text{ш}}^{\text{крут}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,4mR^2}{I}} \quad (8.13)$$

Наконец, можно рассмотреть колебания наклонного маятника на нити, в которой при кручении упругие силы отсутствуют ($I=0$):

$$T_{\text{ш}}^{\text{науп}} = 2\pi \sqrt{\frac{1,4 L}{g \cos(\beta)}} \quad (8.14)$$

8.5 ХОРОШО ЛИ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПИСЫВАЕТ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНУЮ СИТУАЦИЮ?

Пусть в некотором эксперименте экспериментатор, задавая ряд значений физической величины X , получил в результате измерений ряд значений другой физической величины Y . Пусть, далее, экспериментатор располагает теорией, согласно которой величины Y и X связаны линейной зависимостью

$$Y = aX + b,$$

где a и b - некоторые постоянные. Возникает вопрос, хорошо ли экспериментальные данные соответствуют теоретической модели. В математической статистике разработаны строгие методы анализа подобных ситуаций, но они малопонятны и требуют большой вычислительной работы. Поэтому здесь мы рассмотрим нестрогий

графический метод анализа. Постоянные a и b теоретической модели, как 'правильно', сами выражаются через некоторые величины, определяемые в эксперименте, поэтому они известны с погрешностями Δa и Δb , которые определяются стандартным образом [1]. Рассмотрим рисунок 8.10.

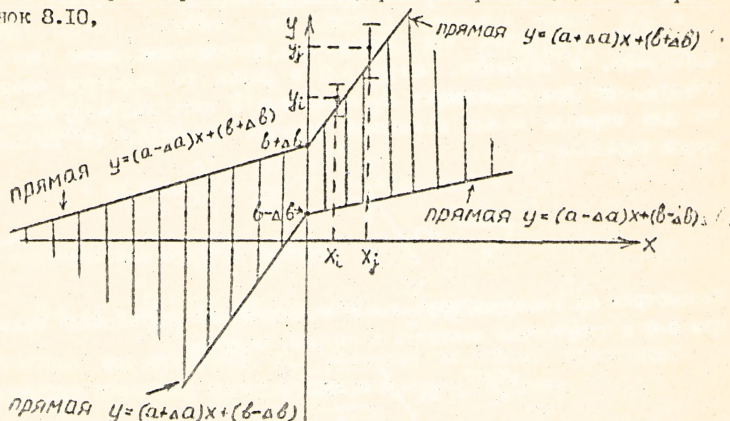


Рис. 8.10.

на котором всевозможные прямые вида $Y = \alpha X + \beta$, где $\alpha \in [a - \Delta a, a + \Delta a]$, $\beta \in [b - \Delta b, b + \Delta b]$ заполняют на координатной плоскости (X, Y) заштрихованную область (для наглядности размеры этой области в данном случае сильно преувеличены). Отметим на той же координатной плоскости экспериментальные точки (X_i, Y_i) . Каждое экспериментальное значение Y_i найдено с погрешностью ΔY_i . Изобразим эти погрешности с помощью вертикального отрезка, откладывая отрезки ΔY_i вверх и вниз от точки (X_i, Y_i) (чаще всего все ΔY_i одинаковы, т.е. экспериментальные значения величины Y равнооточны). Назовем попаданием экспериментальной точки в заштрихованную область такое ее положение, когда отрезок, изображающий погрешность, хотя бы частично находится в заштрихованной области. На рисунке показана i -я точка, не попадающая в область, и j -я точка, в эту область попадающая. Если все экспериментальные точки попадают в область, то можно сказать, что экспериментальные данные соответствуют теоретической модели с доверительной вероятностью p^2 , где p - доверительная вероятность, с которой были определены погрешности Δa , Δb и ΔY_i (подумайте, почему p^2 , а не p) В случае попадания в заштрихованную область

некоторой доли φ экспериментальных точек доверительная вероятность соответствия теоретической модели экспериментальным данным может быть оценена как φ^2 . При $\varphi=0$, т.е. когда ни одна экспериментальная точка не попадает в заштрихованную область, можно сказать, что теоретическая модель неадекватна экспериментальным данным.

8.6 ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Найти сколько времени пройдет от начала движения со скольжением до начала чистого качения.
2. Какова скорость центра S инерции шара в этот момент?
3. Найти величину увеличения кинетической энергии вращательного движения и уменьшение кинетической энергии поступательного движения.
4. Каков знак работы силы трения?

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладышук А.А., Луценко Е.В., Чонциц Н.И. Лабораторные работы по курсу физики. Часть I. Физические основы механики. Фронтальная работа №1 "Изучение теории погрешностей и кинематики материальной точки" (методические указания). - Брест, БИСИ, 1987.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Гладковский Виктор Иванович
Новикова Тамара Антоновна
Чопциц Николай Игнатьевич
Швец Мария Ивановна

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ
ФИЗИКИ. МЕХАНИКА.

Методические указания по выполнению лабораторной
работы № 8. "Наклонный маятник".

Ответственный за выпуск Гладковский В.И.
Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 26.01.93 г. формат 60x84/16. Печать офсетная
Усл.п.л. 1,4. Уч.изд.л. 1,5. Тираж 200 экз. Заказ № 403.
Бесплатно. Отпечатано на роталпринте Брестского политехнического
института. 224017. Брест, ул.Московская, 267.