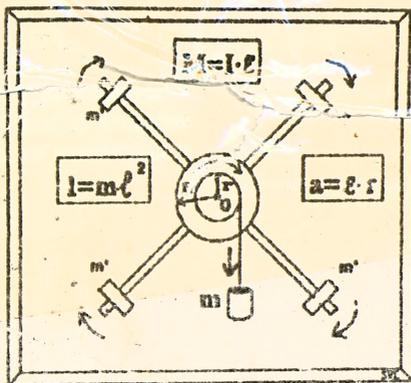


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БРЕСТСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ФИЗИКИ

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ. МЕХАНИКА.  
Методические указания по выполнению лабораторной работы №  
"ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ДИНАМИКИ  
ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО  
ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ НА  
ПРЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА"



БРЕСТ 1990

**ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ ФИЗИКИ. МЕХАНИКА.**

Методические указания по выполнению лабораторной работы №5  
**"ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА  
ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ НА МАЯТНИКЕ ОБЕРБЕКА"**, Брест, БрПИ, 1993

В методических указаниях на примере маятника Обербека экспериментально проверяется зависимость между физическими величинами, характеризующими вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Лабораторная работа предназначена для студентов всех специальностей и всех форм обучения в БрПИ.

**Авторы:** Н.И. ЧОПЧИЦ, доцент, Г.С. КАНДИЯН, ст. преподаватель,  
Т.А. НОВИКОВА, ассистент, М.И. ШВЕЦ, ассистент.

**Рецензент:** В.М. КОСАРЕВ, доцент кафедры физики  
БрПИ им. А.С. Пушкина.

Рекомендовано 1993 г. 12.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА М-5

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ НА МАТНИКЕ ОБЕРБЕКА

1. Цель работы:

Экспериментальная проверка зависимостей между физическими величинами, характеризующими вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

2. Приборы и принадлежности: маттник Обербека, комплект перегрузков, миллисекундомер.

3. Сущность экспериментальной установки и подготовка установки к измерениям.

Маттник Обербека представляет собой инерционное колесо в виде крестовины (рис. 1). На четырех взаимно перпендикулярных стержнях могут перемещаться грузы  $m'$ . На горизонтальной оси крестовины имеется двухступенчатый диск радиуса  $r_1$  и  $r_2$ , на который наматывается нить. Один конец нити прикреплен к диску, а на втором конце нити, перекинутой через неподвижный блок  $B$ , подвешен груз  $M$ , состоящий из основного груза, на который могут помещаться дополнительные грузы. Под влиянием падающего груза нить разматывается с диска и вызывает ускоренное вращение крестовины вокруг неподвижной горизонтальной оси. Маттник с помощью неподвижного крюштейна установлен на вертикальной колонне 1, на которой нанесена миллиметровая шкала для подсчета длины перемещения грузов. На вертикальной колонне 1 прикреплены два крюштейна: нижний (2) неподвижный и верхний (3) подвижный. Подвижный крюштейн (3) можно перемещать вдоль колонны (1) и фиксировать его в любом положении, определяя таким образом длину пути  $H$  грузов.

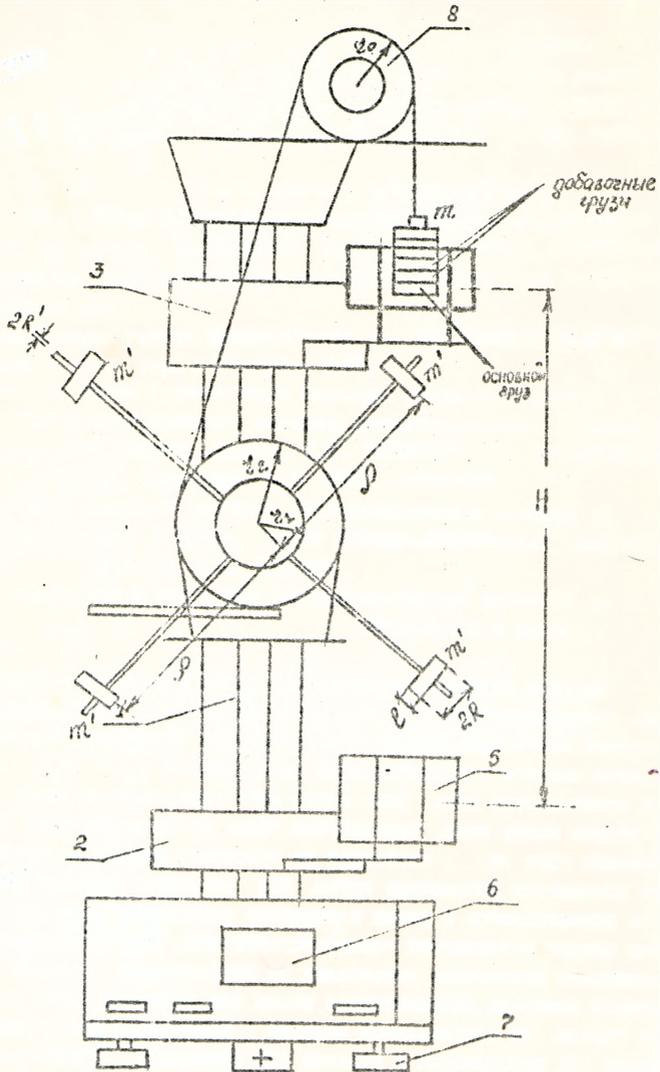


Рис. 1.

Установка снабжена двумя фотоэлектрическими датчиками (4 и 5), вырабатывающими электроимпульсы соответственно начала и конца измерений времени движения грузов. Маятник с грузами удерживается в состоянии покоя с помощью тормозного электромагнита. На основании колонны жестко закреплен миллисекундомер (6), к которому подключены фотодатчики. Само основание прибора снабжено регулируемыми ногами (7), обеспечивающими горизонтальную установку прибора.

Работа с прибором допускается только при наличии заземления.

На установке можно провести прямое измерение времени движения груза массой  $m$  на пути  $H$  и получить, таким образом, множество значений времени при различных  $m, H, \rho$  и радиусах намотки  $\xi_1$  и  $\xi_2$  к различным положениям грузов  $m'$ .

Исно, что проведение измерений времени при всех возможных комбинациях указанных величин - нереальная задача. Кроме того, неясно, что с результатами делать дальше и что с их помощью можно определить.

Ответы на последние вопросы дает теоретическая модель экспериментальной ситуации. Она же позволяет составить план измерений и обработки результатов.

Любая теоретическая модель дает приближенное описание экспериментальной ситуации, поскольку пренебрегает влиянием многих реально имеющих место эффектов.

Ниже рассматриваются две модели возрастающей сложности. Чем сложнее модель, тем труднее с ней работать.

При выполнении работы вы должны вначале выполнить задания 1.1. - 1.4\* модели I и только после этого вместо задания 1.5\* можно выполнить задание 2.1\*\* модели II.

В модели I сформулированы и обязательные задания и необязательные, которые помечены звездочкой (\*), и за которые вы получаете дополнительные баллы к рейтингу. Задание модели II, помеченное двумя звездочками (\*\*), необязательное, но оценивается наиболее высоко.

Ниже дается необходимая для выполнения работы и обработки результатов информация по каждой модели.

**Важнейшее!** Для отчета по работе необходимо изучить также материал приложений.

**Модель I.** В этой модели считается, что трение в оси блока B отсутствует, этот блок невесом, а момент сил трения  $M_{тр}$  в оси

блока с крестовиной не зависит от угловой скорости вращения. В этих условиях ускорение груза массой  $m$  постоянно на всем отрезке  $H$  и равно (Приложение 1).

$$\alpha = \frac{mg - \frac{M_{тр}}{r}}{m + \frac{J}{r^2}}$$

где  $r$  - радиус шкатулки,  $J$  - момент инерции блока с крестовиной ( $J = J_1$  или  $J_2$ ,  $J$  - определяется положением грузов массой  $m$  и калды и моментом инерции блока без грузов  $J_0$ ).

С другой стороны, на основании кинематических соображений, если  $\alpha$  - постоянная величина, то  $\alpha = \frac{2H}{t^2}$ , где  $H$  - задаваемое перемещение груза,  $t$  - измеренное время его движения. Тогда

$$\frac{2H}{t^2} = \frac{mg - \frac{M_{тр}}{r}}{m + \frac{J}{r^2}} = \alpha \quad (1.1)$$

Формула (1.1) является основной для работы в рамках модели 1.

#### Задача I.1

Проверка независимости момента сил трения  $M_{тр}$  от угловой скорости вращения блока

а) освободите стержни крестовины от грузов  $m$  и убедитесь, что блок с крестовиной находится в безразличном равновесии в любом из возможных положений, когда нить с грузом  $m$  не прикреплена к блоку. Если это не так, то добейтесь состояния безразличного равновесия путем незначительного выдвижения или выдвиживания стержней крестовины в ось блока. В дальнейшем следует строго следить за тем, чтобы это условие не нарушалось вследствие случайных возможных вращений стержней в гнездах, особенно при последующем закреплении на стержнях грузов массой  $m$ . Закрепите грузы  $m$  на указанном преподавателем расстоянии  $\rho$  от оси и опять проверьте, находится ли система в состоянии безразличного равновесия. Если это не так, необходимо сменить грузы на стержнях крестовины добейтесь, чтобы это состояние имело место. Продолжите измере-

ния времени нужно будет произвести не менее чем при 5 значениях  $H$ , поэтому согласуйте с преподавателем рабочий интервал значений  $H$  и шаг измерения  $H$  в пределах этого интервала. Установите крошечный груз на минимальном значении  $H$  из рабочего интервала. Закрепите один конец нити на диске радиуса  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1$  или  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_2$  по указанию преподавателя, перекиньте нить с подвешенным на другом ее конце грузом (основной груз + указанное преподавателем число дозвочных грузов) через неподвижный блок и добейтесь, чтобы нижний край груза  $m$  совпал с чертой на корпусе верхнего фотокаччика (4).

Идея проверки

Если  $M_{\text{пл}}$  не зависит от угловой скорости вращения, то при различных  $H$  правая часть формулы (1.1) постоянна и зависимость ( $t^2$ ) от  $H$  должна быть линейной:

$$t^2 = \frac{R}{a} H \quad (1.1.1)$$

Поэтому, если нанести экспериментальные точки  $(H_i, t_i^2)$  на координатную плоскость, по оси абсцисс которой откладывается  $H$ , а по оси ординат -  $(t^2)$ , то экспериментальные точки должны лежать на прямой:

а) проведите измерения  $t_i$  при различных  $H_i$  (при каждом  $H_i$  не менее 3-х раз и в качестве  $t_i$  примите среднее из полученных значений) и убедитесь визуально в линейной зависимости  $(t^2)$  от  $(H)$ ;

б) более строгое рассмотрение требует привлечения метода наименьших квадратов (МНК) и критериев согласия, например  $\chi^2$ -критерия Пирсона.

Обозначим в (1.2)  $t^2 = y$ ,  $H = x$ ,  $\frac{R}{a} = k$ . Тогда

$$y = kx$$

В приложении III показано, что наилучшее в смысле МНК значение коэффициента  $k$  для такой зависимости имеет вид:

$$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum H_i t_i^2}{\sum H_i^2} \quad (1.1.2)$$

где суммирование производится по всем задаваемым  $H_i$  и измеренным  $t_i$ . Найдите  $k$  по формуле (1.3) и проведите на координатной

плоскости  $(H, t^2)$  эту наилучшую в смысле МНК прямую. Для применения  $\chi^2$ -критерия следует далее вычислить величину

$$S = \sum \frac{(y_i - kx_i)^2}{(\Delta y_i)^2} = \sum \frac{(t_i^2 - kH_i)^2}{(\Delta t_i^2)^2},$$

где  $\Delta y_i = 2t_i \Delta t_i$  - погрешность в определении величины  $y_i = t_i^2$  в  $i$ -м измерении. Поскольку  $t_i$  определяется прямым образом, то

$$\Delta t_i = \sqrt{(\Delta t_i)_{\text{разд}}^2 + (\Delta t_i)_{\text{эрод}}^2 + (\Delta t_i)_{\text{отск}}^2}$$

При использовании электронных измерителей времени с цифровой индикацией можно принять  $\Delta t_i_{\text{разд}} \gg \Delta t_i_{\text{эрод}}$  и  $\Delta t_i_{\text{отск}}$ . Поэтому

$$\Delta t_i \approx \Delta t_i_{\text{разд}}$$

Тогда для величины  $y_i = t_i^2$  погрешность будет равна

$$\Delta y_i = 2t_i \Delta t_i$$

Таким образом

$$S = \sum \frac{(t_i^2 - kH_i)^2}{(2t_i \Delta t_i)^2}$$

Затем величину  $S$  сравните с табличным значением для  $\chi^2$ -критерия так, как это делалось в работе (М-1), и найдите уровень значимости проверяемой гипотезы о независимости  $M_{\text{тр}}$  от угловой скорости вращения.

### Задача 1.2 Оценка момента сил трения $M_{\text{тр}}$ .

Основная идея оценки состоит в следующем. Пусть  $m_{\text{min}}$  - минимальная масса груза  $m$ , при которой система приходит в движение, т.е. при  $m < m_{\text{min}}$  система покоится. Тогда из формулы (1.1) при  $a = 0$  получим

$$M_{\text{тр}} = m_{\text{min}} g \xi, \quad (1.2.1)$$

где  $\xi$  - радиус намотки на блоке с крестовиной. Поскольку даже основной груз без добавочных уже приводит систему в движение, то для определения  $m_{\text{min}}$  используется другая нить с очень легкой платформочкой, на которую можно помещать дополнительные грузы массы из набора, находящегося на рабочем месте.

а) закрепите нить с платформочкой на меньшем радиусе  $\xi_1$  сту-

пенчатого блока с крестовиной, перекиньте нить через неподвижный блок 8 и кладите на платформочку дополнительные грузы до тех пор, пока система не придет в движение. Проведите опыт несколько раз, усреднив значения  $M_{тр}$ . По формуле (1.2.1), положив  $z = z_1$ , найдите  $M_{тр}$ ;

б) повторите измерения при большем радиусе катушки  $z_2$  и опять найдите  $M_{тр}$  по формуле (1.2.1) положив  $z = z_2$ ;

в) сравните полученные в п.п. а), б) значения  $M_{тр}$  и письменно сформулируйте выводы.

### Задание 1.3 Определение момента инерции ступенчатого блока с крестовиной и момента сил трения

Допустим, что мы измерили  $t_1$ , движения груза массой  $m$  на заданном перемещении  $H$  при радиусе катушки  $z_1$ , а затем время  $t_2$  движения того же груза на том же перемещении при радиусе катушки  $z_2$ . Положение грузов  $m$  в обоих случаях не изменялось. Тогда при постоянстве  $M_{тр}$ , имеем согласно формуле (1.1)

$$\frac{2H}{t_1^2} = \frac{mg - \frac{M_{тр.}}{z_1}}{m + \frac{J}{z_1^2}}, \quad \frac{2H}{t_2^2} = \frac{mg - \frac{M_{тр.}}{z_2}}{m + \frac{J}{z_2^2}}$$

Решая систему, находим

$$J = \frac{m z_2 z_1 [(z_2 - z_1)g - \frac{z_2 2H}{t_2^2} + \frac{z_1 2H}{t_1^2}]}{z_1 \frac{2H}{t_2^2} - z_2 \frac{2H}{t_1^2}} \quad (1.3.1)$$

$$M_{тр.} = m z_1 (g - \frac{2H}{t_1^2}) - \frac{J}{z_1} \cdot \frac{2H}{t_1^2}$$

Таким образом, для определения момента инерции и момента сил трения имеем следующую программу действий:

а) согласуйте с преподавателем выбор  $H$  и  $m$ . Лучше, если  $H$  будет как можно больше, т.е. в качестве  $H$  можно принять максимальное  $H$  из рабочего интервала задания 1.1.;

б) измерьте несколько раз время движения груза при радиусе намотки  $\xi = \xi_1$  и найдите среднее значение  $t_1$ ;

в) измерьте несколько раз время движения того же груза при радиусе намотки  $\xi = \xi_2$  и найдите среднее значение  $t_2$ ;

г) по формулам (1.3.1) найдите  $\mathcal{J}$  и  $M_{тр}$ ;

д) повторите измерения п. п. б) - г) при других массах груза  $m$  (не менее трех значений) и усредните полученные результаты для  $\mathcal{J}$  и  $M_{тр}$ ;

е) вычисление погрешностей  $\Delta \mathcal{J}$  и  $\Delta M_{тр}$  исходя из формул (1.3.1) достаточно громоздко и малопоучительно, поэтому примите в качестве погрешностей  $\Delta \mathcal{J}$  и  $\Delta M_{тр}$  погрешность разброса при различных массах грузов  $m$ ;

ж) сравните  $M_{тр}$  с значением, найденным в предыдущем задании и сформулируйте письменно причины возможных расхождений.

Задание 1.4\* Проверка аддитивности момента инерции

д) Пусть  $\mathcal{J}_0$  - момент инерции блока с крестовиной без грузов. Если каждый груз считать материальной точкой, находящейся на расстоянии  $\rho$  от оси, то вследствие аддитивности момента инерции состоящей в том, что момент инерции составного тела равен сумме моментов инерции частей, момент инерции  $\mathcal{J}$  при наличии грузов в крестовине будет равен

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + 4m\rho^2 \quad (1.4.1)$$

Если учесть, что фактически каждый груз является полым цилиндром длиной  $\ell$ , внешним радиусом  $R$  и внутренним  $R'$ , то вместе с (1.4.1) будем иметь

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + 4m\rho^2 + \frac{1}{3}m\ell^2 + m'(R^2 + R'^2) \quad (1.4.2)$$

Целью данного задания и является проверка формулы (1.4.1) или (1.4.2) вытекающих из аддитивности момента инерции.

Сек. 1.0. 75% а) момент инерции крестовины с грузами был определен в предыдущем задании. Поэтому тщательно определите величину  $\rho$ . При строгой симметрии системы величина  $\rho$  для всех грузов должна быть одной и той же. Реально, однако, когда при выполнении предыдущих упражнений пришлось добиваться безразличного равновесия системы,

расстояния  $\rho$  для различных грузов оказал(ась) слегка различными. Можно показать, что при небольших различиях  $\rho$  для различных грузов в формулы (1.4.1), (1.4.2) нужно подставлять среднее арифметическое отдельных значений. Рекомендуем это сделать самостоятельно в качестве упражнения;

б) снимите грузы  $m_i'$  с крестовины и повторите все измерения предыдущего задания, определив момент инерции  $J_0$  крестовины без грузов и момент сил трения  $M_{тр}$  в этом случае;

в) подставляя в формулы (1.4.1) и (1.4.2) значения  $J$  из предыдущего задания и  $J_0$ ,  $\rho$ , проверьте выполнение условия аддитивности. Сформулируйте письменно вывод о том, какая из формул точнее;

г) сравните значения  $M_{тр}$  при наличии грузов  $m_i'$  на крестовине и значения  $M_{0тр}$ , когда они отсутствуют. Опыт показывает, что момент сил трения в оси любого блока можно представить в виде суммы двух частей: приблизительно постоянной, не зависящей от нагрузки на ось составляющей и составляющей, пропорциональной нагрузке на ось блока (реакции оси).

Рекомендуем самостоятельно продумать причины возникновения этих составляющих и обсудить их с преподавателем.

При выполнении задания 1.3 изменялась масса  $m$  приводящих систему в движение грузов, а также радиус намотки. Это приводит, как показано в Приложении II к очень незначительному изменению реакции оси и поэтому можно было считать  $M_{тр}$  все время постоянным. Напротив, когда грузы  $m_i'$  сняты с крестовины, нагрузка на ось изменяется значительно, поэтому изменяется значительно и та составляющая  $M_{тр}$ , которая пропорциональна нагрузке.

Изучите самостоятельно на основе результатов предыдущих заданий, пользуясь консультациями преподавателя, осинить ту и другую составляющие  $M_{тр}$ .

**Задание 1.5-** Определение момента инерции ступенчатого блока с крестовиной и момента сил трения по методу изменяемых изрядов

а) Перепишем формулу (1.1) в виде

$$m(g-a) = \frac{J}{r^2} a + \frac{M_{тр}}{r}.$$

Обозначим

$$m(g-a) = \mathcal{L}, \quad a = \alpha, \quad \frac{g}{g^2} = A, \quad \frac{M_{гр.}}{g} = B.$$

Тогда получим

$$\mathcal{L} = A \alpha \alpha + B \quad (1.5.4)$$

Основная идея определения момента инерции состоит в следующем. Определив время движения груза  $\mathcal{L}_i$  на заданном отрезке  $H$  при различных значениях  $m_i$  массы груза, можно найти

$$\alpha_i = a_i = \frac{2H}{\mathcal{L}_i^2} \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_i = m_i(g - a_i),$$

где

$g = 9,8 \text{ м/с}^2$  - ускорение свободного падения. Зависимость между  $\mathcal{L}$  и  $\alpha$  согласно (1.5.4) линейная. Соответствует ли это действительности, можно убедиться визуально, нанеся на координатную плоскость ( $\alpha, \mathcal{L}$ ) экспериментальные точки. Коэффициенты  $A$  и  $B$  можно найти по мак (Приложение 19).

$$A = \frac{\langle \alpha \mathcal{L} \rangle - \langle \mathcal{L} \rangle \langle \alpha \rangle}{\langle \alpha^2 \rangle - \langle \alpha \rangle^2}; \quad B = \langle \mathcal{L} \rangle - A \langle \alpha \rangle \quad (1.5.2)$$

где

$$\langle \alpha \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i; \quad \langle \alpha \mathcal{L} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{L}_i$$

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i; \quad \langle \alpha^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2,$$

$N$  - число измерений.

Таким образом, нужно реализовать следующую программу:

а) установить пружинки  $\alpha$  на наибольшем возможном расстоянии  $H$  от рабочего интервала задания  $L, l$ . Каждую кантовку ( $\mathcal{L}_i$  или  $\mathcal{L}_0$ ) измерьте по указанию преподавателя.

б) измерьте время движения свободного груза на заданном расстоянии  $H$  разными мак и результаты запишите. Обозначим это среднее время  $\mathcal{L}_i$ , а массу свободного груза -  $M_{гр.}$ , запишите

$$x_1 = \frac{2H}{t_1^2}, \quad \mathcal{L}_1 = m_1(g - x_1);$$

в) добавьте к основному грузу один добавочный, повторите измерения времени и найдите:

$$x_2 = \frac{2H}{t_2^2} \text{ и } \mathcal{L}_2 = m_2(g - x_2),$$

где  $t_2$  - среднее время движения в этом случае,  $m_2$  - масса основного груза с добавочным;

г) добавьте еще один добавочный груз, найдите  $t_3$ ,  $x_3$ ,  $\mathcal{L}_3$  и т. д.;

д) на координатной плоскости ( $x, \mathcal{L}$ ) нанесите экспериментальные точки ( $x_i, \mathcal{L}_i$ ) и оцените визуально лежат ли они на прямой. Результаты удобно организовать в виде следующей таблицы

$$H = \dots \text{ м}, \quad g = \dots \text{ м}.$$

Время движения (с)	$t_i$ (с)	$x_i = \frac{2H}{t_i^2}$ (м·с <sup>-2</sup> )	$m_i$ (кг)	$\mathcal{L}_i = m_i(g - x_i)$ (Н)	$x_i^2$ (м <sup>2</sup> ·с <sup>-4</sup> )	$\mathcal{L}_i x_i$ (Н·м·с <sup>-2</sup> )
...	...	...	...	...	...	...
		$\langle x \rangle = \frac{\sum x_i}{n}$		$\langle \mathcal{L} \rangle = \frac{\sum \mathcal{L}_i}{n}$	$\langle x^2 \rangle = \frac{\sum x_i^2}{n}$	$\langle \mathcal{L} x \rangle = \frac{\sum \mathcal{L}_i x_i}{n}$

е) по формулам (1.5.2) найдите  $A$  и  $B$  проведите, используя найденные значения, на плоскости ( $x, \mathcal{L}$ ) наилучшую прямую согласно уравнению (1.5.4);

ж) найдите момент инерции крестовины и момент сил трения по формулам

$$J = Ay^2, \quad M_{тр} = Bz;$$

з) сравните найденные значения  $M_{тр}$  с тем, которое было получено в задании 1.2. Сформулируйте причины возможных отличий;

и) строго формулы для расчета погрешностей определения величин  $A$  и  $B$  по мнк громоздки и малонаглядны. Поэтому для оценки этих погрешностей можно воспользоваться следующим приближенным графическим способом.

Для оценки погрешности величины  $B$  сделайте параллельно самой

себе вниз наилучшую прямую, построенную на координатной плоскости ( $X, Z$ ) в пункте  $e$ ) до тех пор, пока выше ее не окажется примерно вдвое больше точек, чем снизу. Затем следует сместить ее вверх, пока снизу не окажется примерно вдвое больше точек, чем сверху. Расстояние между этими прямыми по вертикали обозначим  $\Delta_1 B$ . Тогда погрешность в определении  $B$  равна:

$$\Delta B = \frac{\Delta_1 B}{\sqrt{n}}$$

Считая для простоты, что радиус катушки  $Z$  известен со значительно меньшей погрешностью, получим:

$$\Delta M_{тр.} = Z \Delta B.$$

Для оценки погрешности в определении величины  $A$  участок оси  $X$ , на котором находятся экспериментальные точки, делится на три равные части и средний участок в дальнейшей работе не участвует. Поворачивайте наилучшую прямую так, чтобы на левом участке выше ее оказалось примерно вдвое больше точек, чем под ней, а на правом - наоборот. Затем прямая поворачивается так, чтобы на левом участке примерно 2/3 точек лежали ниже прямой, а на правом - выше ее.

1) Пусть  $\Delta_1 A$  - разница в угловых коэффициентах этих прямых. Тогда погрешность в определении  $A$  равна

$$\Delta A = \frac{\Delta_1 A}{\sqrt{n}}$$

и погрешность в определении момента инерции:

$$\Delta J = Z^2 \Delta A.$$

Найдите  $\Delta M_{тр.}$  и  $\Delta J$  и запишите окончательные результаты для  $J$  и  $M_{тр.}$ :

### Модель 2

Эта модель отличается от модели 1 тем, что в ней учитывается момент сил трения в оси блока  $B$  -  $M'_{тр.}$ . Нагрузка на ось этого блока значительно меньше, чем на ось блока с крестовиной, поэтому при одинаковой нагрузке узда трения можно пренебречь той составляющей  $M'_{тр.}$ , которая пропорциональна нагрузке, и считать,

что  $M'_{np.}$  - постоянная величина, обусловленная креплением оси.  
 В этих условиях теория приложения II дает следующее выражение для ускорения груза

$$\alpha = \frac{mg - \frac{M_{np.}}{z} - \frac{M'_{np.}}{z_0}}{m + \frac{y}{y^2}} \quad (2.1)$$

где  $a = \frac{2H}{l^2}$  - ускорение груза, которое при независимости  $M_{np.}$  и  $M'_{np.}$  от угловой скорости вращения будет при заданных  $m$ ,  $J$ ,  $z$  постоянным. Преобразуем (2.1) следующим образом:

$$m\alpha = mg - \frac{J}{z^2} \alpha - \left( \frac{M_{np.}}{z} + \frac{M'_{np.}}{z_0} \right)$$

Введем обозначения

$$m\alpha = x, \quad a = \alpha, \quad m = y, \quad \left( -\frac{J}{z^2} \right) = A, \quad -\left( \frac{M_{np.}}{z} + \frac{M'_{np.}}{z_0} \right) = B$$

Тогда получим

$$x = ay + Ax + B \quad (2.2)$$

Задавая различные значения массы грузов  $m_i = y_i$  и определяя ускорения  $\alpha_i = x_i$  и  $x_i = y_i \alpha_i$  можно с помощью МКК определить наилучшие значения констант  $a$ ,  $A$ ,  $B$ , соответствующие линейной зависимости II.2, решив следующую систему уравнений, которую рекомендуем получить самостоятельно:

$$\begin{cases} A \sum x_i^2 + a \sum y_i x_i + B \sum x_i - \sum x_i x_i = 0 \\ A \sum x_i y_i + a \sum y_i^2 + B \sum y_i - \sum x_i y_i = 0 \\ A \sum x_i + a \sum y_i + Bn - \sum x_i = 0, \end{cases}$$

где  $n$  - число значений масс грузов  $m_i$  при которых производились опыты.

С учетом вышеприведенных обозначений систему можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} A \Sigma a_i^2 + g \Sigma m_i a_i + B \Sigma a_i - \Sigma m_i a_i^2 &= 0 \\ A \Sigma m_i a_i + g \Sigma m_i^2 + B \Sigma m_i - \Sigma m_i^2 a_i &= 0 \\ A \Sigma a_i + g \Sigma m_i + B n - \Sigma m_i a_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, нужно реализовать следующую программу.

Задача 2.1 \*\* Определите условия свободного падения момента инерции блока с крестовиной и моментов сил трения в силах блоков

а) установите грузы  $m'$  на крестовине так, как в задании 1.3 и добейтесь безразличного равновесия системы, когда к ней не прикреплена нить;

б) закрепите нить на блоке радиусом  $\varrho = \varrho_1$  и измерьте несколько раз время движения основного груза на заданном расстоянии  $H$ . Обозначьте среднее время  $t_1$ , массу основного груза  $m$ , и найдите

$$a_1 = \frac{2H}{t_1^2}$$

в) повторите измерения, используя основной груз + один дополнительный, найдите  $t_2$  и  $a_2 = \frac{2H}{t_2^2}$ , суммарную массу основного груза и одного дополнительного обозначьте  $m_2$ ;

г) повторите измерения, используя основной груз + два дополнительных суммарной массой  $m_3$ , найдите  $t_3$  и  $a_3 = \frac{2H}{t_3^2}$  и т.д.

д) подставьте численные значения в систему (2.3) и решите систему, найдя  $A, g, B$ ;

е) найдите момент инерции системы

$$J = -A \varrho_1^2$$

ж) повторите измерения п.п. б-г при радиусе намотки  $\varrho = \varrho_2$ , вновь подставьте численные значения в формулу (2.3), найдя в результате решения системы значения постоянных  $A', g', B'$  и момента инерции  $J' = -A' \varrho_2^2$ ;

з) усредните результаты для  $J$  и  $g$ , соответствующие  $\varrho = \varrho_1$  и  $\varrho = \varrho_2$ . Сравните значение  $J$  с найденным в задании 1.3, а значение  $g$  - со стандартным  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ;

и) решая систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{M_{тр.}}{z_1} + \frac{M'_{тр.}}{z_0} = -B \\ \frac{M_{тр.}}{z_2} + \frac{M'_{тр.}}{z_0} = -B' \end{cases}$$

найдите моменты сил трения в осях обоих блоков. Сравните результаты для  $M_{тр.}$  с тем, который был получен в задании 1.3 и письменно сформулируйте вывод;

к) поскольку расчет погрешностей на основе формул (2.3) громоздок и малоинформативен, рассчитайте погрешности для  $\bar{J}$  и  $\bar{J}'$  как погрешности разброса при  $z = z_1$  и  $z = z_2$ . В качестве погрешностей  $\Delta M'_{тр.}$  и  $\Delta M_{тр.}$  примите значение, найденное в задании 1.3.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Основные сведения по динамике вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

1. Движение твердого тела, при котором две его точки остаются неподвижными, называется вращением тела вокруг неподвижной оси. Прямая, соединяющая эти точки, называется осью вращения тела. При вращении вокруг неподвижной оси все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости перпендикулярны к ней. Положение твердого тела в пространстве полностью определяется значением  $\varphi$  угла поворота тела из некоторого начального положения.

2. Для характеристики быстроты вращения тела вокруг оси служит угловая скорость. Угловой скоростью называется быстрота изменения (с точнее произвольная) угла поворота  $\varphi$  по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (II 1.1)$$

Вращение называется равномерным, если  $\omega = const$ .

3. Физической величиной, характеризующей быстроту (и направление) изменения угловой скорости  $\omega$ , является угловое ускорение. Угловым ускорением называется первая производная от угловой скорости  $\omega$  или вторая производная угла поворота  $\varphi$  по времени:

$$\epsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (II 1.2)$$

Между угловой скоростью и угловым ускорением связаны соотношения:

ответственно с модулями линейной скорости „ $V$ ” и линейного ускорения „ $a$ ” соотношениями:

$$V = \omega r, \quad a = \dot{\omega} r, \quad (\text{II } 1.3)$$

где  $r$  - радиус окружности вращения.

4. Моментом силы  $F$  относительно неподвижной точки (полюса) называется векторная величина  $\vec{M}$ , равная векторному произведению радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из этой точки в точку приложения силы, на вектор силы  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (\text{II } 1.4)$$

Модуль момента силы

$$M = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot \ell, \quad (\text{II } 1.5)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ , а  $\ell = r \cdot \sin \alpha$  - плечо силы.

При переносе точки приложения силы  $F$  вдоль линии ее действия момент той силы  $M$  относительно одной и той же неподвижной точки не изменяется. Если линия действия силы проходит через точку  $O$  (рис. II 1), то момент силы относительно этой точки равен нулю.

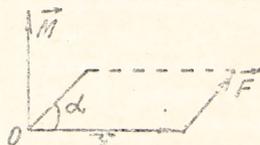


Рис. II 1

5. Момент силы  $F$  относительно неподвижной оси  $Ox$  называется скалярная величина  $M_x$ , равная проекции на эту ось вектора  $M$  момента силы  $F$  относительно произвольной точки на оси. Значение  $M_x$  не зависит от выбора положения точки на оси.

Численный момент относительно неподвижной оси системы сил равен алгебраической сумме моментов относительно этой оси всех сил.

6. Момент инерции материальной системы относительно неподвижной оси  $Ox$  называется физическая величина  $J_x$ , равная сумме произведений масс всех  $n$  материальных точек системы на квадраты их расстояния до оси:

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (\text{II } 1.6)$$

где  $m_i$  и  $\rho_i$  - масса  $i$ -ой точки и ее расстояние от оси.  
Момент инерции тела

$$J_c = \int_{(m)} \rho^2 dm, \quad (\text{П 1.7})$$

где  $dV = \mathcal{D} \cdot dV$  - масса малого элемента объема тела;  $dV$  - плотность;  $\rho$  - расстояние от элемента  $dV$  до оси  $Oz$ .  
Для однородного тела ( $\mathcal{D} = \text{const}$ )

$$J_c = \int_{(V)} \rho^2 \mathcal{D} \cdot dV = \mathcal{D} \int_{(V)} \rho^2 dV \quad (\text{П 1.8})$$

Момент инерции тела является мерой инертности тела во вращательном движении.

7. Теорема Гюйгенса-Штейнера: Момент инерции тела  $J_c'$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела  $J_c$  относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной оси, и произведения массы тела  $M$  на квадрат расстояния  $d$  между осями:

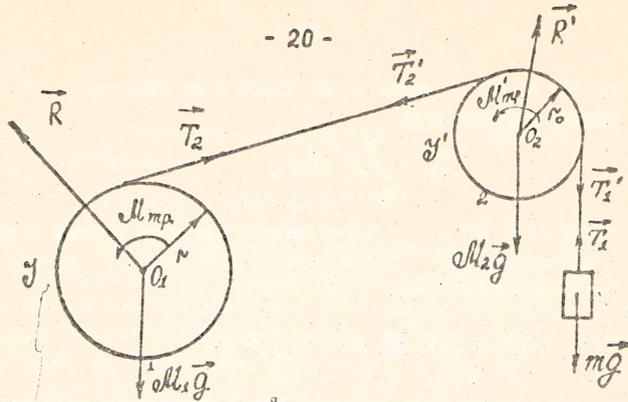
$$J_c' = J_c + m \cdot d^2 \quad (\text{П 1.9})$$

8. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси имеет вид:

$$J \cdot \mathcal{E} = M, \quad (\text{П 1.10})$$

где  $J$  - момент инерции тела (системы тел) относительно оси вращения;  $M$  - сумма проекций на ось вращения моментов всех внешних сил, действующих на тело (систему);  $\mathcal{E}$  - угловое ускорение.

**ПРИЛОЖЕНИЕ II.** Применение законов динамики вращательного и поступательного движения при наличии идеальных связей



Рассмотрим систему, состоящую из блока 1 с моментом инерции  $J$ , который может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси  $O_1$  и блока 2 с моментом инерции  $J'$ , вращающегося вокруг оси  $O_2$ . Радиусы блоков обозначим  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Невесомая нерастяжимая нить (идеальная связь) приводит блоки во вращение посредством привязанного к ней груза массой  $m$ . В осях блоков действуют моменты сил трения  $M_{тр}$  и  $M'_{тр}$ ,  $\vec{R}$  и  $\vec{R}'$  - силы реакций осей блоков. Вследствие невесомости нити  $\vec{T}_1 = \vec{T}'_1$ ,  $\vec{T}_2 = \vec{T}'_2$ . Запишем основное уравнение динамики вращательного движения для каждого блока, учитывая, что моменты сил  $\vec{R}$  и  $\vec{R}'$ ,  $M_1\vec{g}$  и  $M_2\vec{g}$  равны нулю:

$$J\epsilon = T_2 r_2 - M_{тр} r_1$$

$$J'\epsilon' = T_1' r_2 - T_2' r_2 - M'_{тр} r_2$$

где  $\epsilon$ ,  $\epsilon'$  - угловые ускорения блоков. Второй закон Ньютона, записанный для груза массой  $m$  в проекции на вертикально вниз направленную ось, имеет вид:

$$ma = mg - T_1$$

Если проскальзывание нерастяжимой нити по блокам отсутствует, то  $\epsilon = \frac{a}{r_2}$ ,  $\epsilon' = \frac{a}{r_2}$ . Тогда для описания движения системы мы имеем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \gamma \frac{a}{z} = T_2 z - M' m_p. \\ \gamma' \frac{a}{z_0} = T_1 z_0 - T_2 z_0 - M' m_p. \\ m a = m g - T_1 \end{cases} \quad - 21. -$$

Переход от фигурирующих в уравнениях динамики вращательного движения угловых ускорений к ускорению груза оправдывается тем, что ускорение груза легче экспериментально определить на основе прямых измерений времени движения груза.

Выражая  $T_1$  из последнего уравнения, и ставляя во второе, и выражая из него  $T_2$ , которое затем подставим в первое уравнение, получим следующее выражение для ускорения груза

$$a = \frac{m g - \frac{M' m_p}{z} - \frac{M' m_p}{z_0}}{\frac{\gamma}{z^2} + \frac{\gamma'}{z_0^2} + m} \quad ( * )$$

Поскольку формула ( \* ) является следствием законов динамики вращательного и поступательного движений, то ее экспериментальная проверка является одновременно и проверкой правильности применения этих законов для данной экспериментальной ситуации. Любая экспериментальная ситуация описывается в рамках некоторой модели, в которой пренебрегается влиянием реально имеющих место в действительности эффектов. Формула ( \* ) и дает пример такого описания, в котором масса нити считается пренебрежимо малой, нить считается нерастяжимой, скольжение нити по блокам отсутствующим, сопротивлением воздуха при выводе формулы ( \* ) мы также пренебрегали. В работе используются ещё более простые модели 1 и 2.

Во-первых, в обоих моделях масса блока 2 считается пренебрежимо малой по сравнению с массой блока 1. При сравнениях по величине радиусов  $z$  и  $z_0$  это позволяет пренебречь слагаемым  $\frac{\gamma'}{z_0^2}$  по сравнению с  $\frac{\gamma}{z^2}$ . Тогда

$$\alpha = \frac{mg - \frac{M_{тр}}{z} - \frac{M'_{тр}}{z_0}}{m + \frac{J}{z^2}} \quad (**)$$

Моменты сил трения, во-вторых, считаются не зависящими от угловых скоростей вращения. Это позволяет считать при заданной массе груза  $m$  и фиксированном моменте инерции  $J$  ускорение постоянным и находить его из кинематического соотношения

$$\alpha = \frac{2H}{t^2}$$

где  $t$  - время движения груза  $m$  на заданном перемещении  $H$  (подразумевается, конечно, что движение начинается из состояния покоя).

Моменты сил трения в осях блоков  $M_{тр}$  и  $M'_{тр}$  каждый может быть представлен в виде суммы двух составляющих: постоянной, обусловленной особенностями крепления оси в подшипниках и переменной, зависящей от реакции  $R$  и  $R'$  осей. В реальной установке масса груза  $m$  значительно меньше массы блока  $M_2$ , поэтому  $R' \ll R$  и можно, следовательно, полагать, что  $M'_{тр}$  - постоянная величина.

Именно и это предполагается в модели II. Кроме того, по той же причине сила  $R$  при изменении массы  $m$  грузов также изменяется незначительно и при различных  $m$ , но при фиксированной массе  $M_2$  блока,  $M_{тр}$  остается постоянным. Перечисленные выше предположения вместе с формулой (\*\*) и дают модель II.

В модели I используются дальнейшие упрощения: предполагается, что трение в оси блока 2 вообще отсутствует.

Тогда имеем

$$\alpha = \frac{mg - \frac{M_{тр}}{z}}{m + \frac{J}{z^2}} \quad (***)$$

Рекомендуем самостоятельно сформулировать условия, при которых это предположение оправдано, если полагать, что конструкции узла крепления осей блоков устроены одинаково.

ПРИЛОЖЕНИЕ III. ГРАФИК ДЛЯ ЗАВИСИМОСТИ  $y = kx$ .

Задача состоит в том, чтобы подобрать такое значение  $k$ , при котором прямая  $y = kx$  наилучшим образом аппроксимировала экспериментальные результаты (т.е. наиболее близко подходила к экспериментальным точкам). Идея метода МНК и заключается в том, что значение коэффициента  $k$  будет оптимальным, если сумма квадратов разностей экспериментальных значений  $y_i$  и значений  $y_i'$ , вычисленных по формуле  $y_i' = kx_i$  минимальная:

$$\varphi_y = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i)^2 \longrightarrow \min$$

Условие экстремума функции  $\frac{\partial \varphi_y}{\partial k} = 0$  дает

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i - k \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0,$$

откуда

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Вычисления по методу наименьших квадратов удобно организовывать в виде таблицы.

$i$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$
1	$x_1$	$y_1$	$x_1^2$	$x_1 y_1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$x_n$	$y_n$	$x_n^2$	$x_n y_n$
			$\sum_{i=1}^n x_i^2$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. МНК для зависимости  $z = Ax + B$

Рассуждая таким же образом, как и в Приложении 3 для нахождения оптимальных значений коэффициентов  $A$  и  $B$  минимизируем функцию

$$\varphi_z = \sum_{i=1}^n [(Ax_i + B) - z_i]^2$$

Запишем условие экстремума

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial A} &= 2 \sum_{i=1}^n [(Ax_i + B) - z_i] \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial B} &= 2 \sum_{i=1}^n [(Ax_i + B) - z_i] = 0 \end{aligned} \right\}$$

Сократив каждое уравнение системы на 2 и раскрыв скобки, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (A \cdot x_i^2 + B x_i) &= \sum_{i=1}^n x_i z_i \\ \sum_{i=1}^n (A x_i + B) &= \sum_{i=1}^n z_i \end{aligned} \right\}$$

Введем следующие обозначения:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \langle z \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i; \quad \langle zx \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i x_i; \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Тогда система примет вид:

$$A \langle x^2 \rangle + \langle x \rangle B = \langle zx \rangle$$

$$A \langle x \rangle + B = \langle z \rangle$$

Решив систему, получим:

$$A = \frac{\langle zx \rangle - \langle z \rangle \langle x \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}; \quad B = \langle z \rangle - A \langle x \rangle.$$

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Момент инерции цилиндра

При определении момента инерции  $J_x$  крестовины с грузами  $m'$  по формуле (1.4.1) каждый из четырех грузов рассматривается как материальная точка. Но в самом деле каждый груз представляет из себя однородный полый цилиндр, ось вращения которого проходит через центр крестовины (рис. П5.1) перпендикулярно к его продольной геометрической оси.

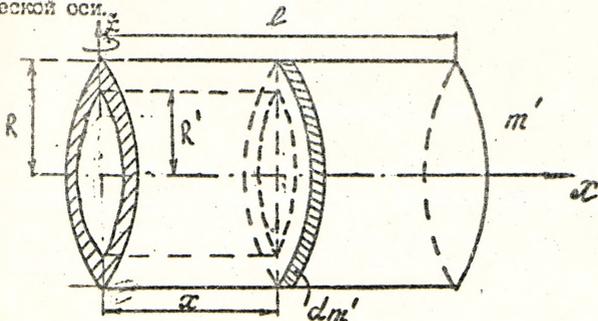


рис. П5.1

Выделим мысленно бесконечно короткий цилиндр с массой  $dm'$ , находящийся от оси вращения на расстоянии  $x$ . Для его момента инерции по теореме Паллеса-Штейнера можно написать

$$dJ_z = dm'x^2 + \frac{1}{4} dm'(R^2 + R'^2), \quad (\text{П } 5.1)$$

а для момента инерции всего цилиндра

$$J_z = \int x^2 dm' + \frac{1}{4} (R^2 + R'^2) \int dm' \quad (\text{П } 5.2)$$

Первое слагаемое в правой части формально совпадает с выражением для момента инерции однородного бесконечного тонкого стержня.

$$\int dm'x^2 = \frac{1}{3} m'\ell^2$$

Следовательно,

$$J_z = \frac{1}{3} m'\ell^2 + \frac{1}{4} m'(R^2 + R'^2) \quad (\text{П } 5.3)$$

Момент  $J_z$  инерции относительно поперечной геометрической оси, проходящей через центр масс цилиндра, можно найти по формуле (П 5.3), если цилиндр разделить на два цилиндра с высотой  $\ell/2$  и массами  $m'/2$ . Тогда получим

$$J_z = \frac{1}{12} m'\ell^2 + \frac{1}{4} m'(R^2 + R'^2) \quad (\text{П } 5.4)$$

Момент инерции всей системы можно вычислить по формуле

$$J_x = J_0 + 4m'\rho_x^2 + 4 \frac{m'\ell^2}{12} + 4 \frac{m'(R^2 + R'^2)}{4}$$

или

$$J_x = J_0 + 4m'\rho_x^2 + \frac{m'\ell^2}{3} + m'(R^2 + R'^2). \quad (\text{П } 5.5)$$

#### 4. Вопросы для самопроверки

1. Основное уравнение динамики твердого тела для вращатель-

ного движения относительно неподвижной оси.

2. Момент инерции материальной точки, системы материальных точек и однородного твердого тела.

3. Аналогии между кинематическими характеристиками вращательного и поступательного движений абсолютно твердого тела; то же динамических характеристик.

4. Причины возникновения ошибок в ходе экспериментов.

## 5. ЛИТЕРАТУРА

1. Методические указания к лабораторным работам по механике и молекулярной физике. Выпуск 1. "Изучение вращательного движения на маятнике Обербека".

2. Лабораторные занятия по физике. Под ред. Л. Л. Гольдина. М., Наука. 1983.

3. Сивухин Д. В. Курс физики. Т. 1.

4. Детлаф А. А., Яворский В. М. Курс физики. Т. 1.

Составители: Чопчиц Николай Игнатъевич  
Кандилян Генрик Сержаевич  
Новикова Талсия Антоновна  
Швец Мария Ивановна

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО КУРСУ  
ФИЗИКИ. МЕХАНИКА.

Методические указания по выполнению лабораторной  
работы № 5.

Ответственный за выпуск Чопчиц Н.И.  
Редактор Строчак Т.В.

---

Подписано к печати 26.01.93 г. Формат 60x84/16. Печать офсетная.  
Усл.п.л. 1,4. Уч.изд.л. 1,5. Тираж 200 экз. Заказ № 404.  
Бесплатно. Отпечатано на роталитре Брестского политехнического  
института. 224017. Брест, ул.Московская, 267.