

15. Wieghardt, K. Uber den balken auf nachgiebiger unterlage / K. Wieghardt // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1922. – Vol. 2. – S. 165–184.

16. Мурашев, В. Н. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона (Основы сопротивления железобетона) / В. Н. Мурашев. – М. : Министерство строительства предприятий машиностроения, 1950. – 268 с.

17. Босаков, С. В. Развитие теории расчета шарнирно-соединенных балок на упругом основании с учетом их физической нелинейности / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. науч. тр. / Ин-т БелНИИС ; редкол.: О. Н. Лешкевич [и др.]. – Минск, 2019. – Вып. 11. – С. 11–24.

УДК 624.072

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВРМ В НЕЛИНЕЙНЫХ РАСЧЕТАХ ФУНДАМЕНТНЫХ ПЛИТ С УЧЕТОМ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ КОНТАКТА

А. Г. Пусенков

*М. т. н. БелГУТ, главный инженер завода КПД ОАО «Гомельский ДСК», Гомель,
Беларусь, pusenkov_a@mail.ru*

Реферат

Расчет упругого основания и балочной плиты с учетом касательных напряжений в общем виде является чрезвычайно сложной биконтактной задачей (т. е. задачей с двумя контактными поверхностями). Взаимодействие балочной плиты и упругого основания с учетом касательных напряжений в зоне контактного взаимодействия по сути является разновидностью контактных задач теории упругости, решение которой возможно в нелинейной постановке при работе упругих сред в зоне небольших упруго-пластических деформаций, т. е. с учетом физической нелинейности.

Учет нелинейности деформирования балочной плиты позволяет увеличить, как правило, допустимую нагрузку на плиту за счет перераспределения и уменьшения максимальных значений усилий, но при этом обнаруживается резкое возрастание неравномерности осадок. Данные нелинейного расчета позволяют выполнить достоверную оценку работы конструкции по предельным состояниям эксплуатационной пригодности.

Для решения рассматриваемой задачи применяется вариационно-разностный метод (ВРМ), который реализуется в перемещениях через конечно-разностные соотношения теории упругости (случай плоской деформации) при использовании в решении функционала полной потенциальной энергии деформации системы, состоящей из плиты, упругого основания, зоны контактного взаимодействия и внешней нагрузки.

Величина полной потенциальной энергии балочной плиты на упругом основании \mathcal{E} состоит из энергии деформации плиты U , энергии деформации упругого основания A и работы внешней нагрузки P .

Предлагаемая методика статического расчета позволяет определить внутренние усилия в балочной плите и осадки упругого основания под плитой с учетом касательных напряжений в контактной зоне, достаточно полно исследовать эту зону взаимодействия балочной плиты с упругим основанием, а также получить полную картину влияния касательных напряжений на напряженно-деформированное состояние упругого основания. Численная реализация ВРМ производится методом конечных разностей (МКР) в вариационной постановке в программном пакете Mathematica.

Ключевые слова: балочная плита, биконтактная задача, упругое основание, однородное основание, слоистость упругого основания, касательные напряжения, контактная зона.

Введение

Из-за разнообразия конструктивных решений балочных плит и грунтовых условий в настоящее время нет возможности дать строгое решение пространственной задачи. В связи с этим допускают использование приближенного решения, согласно которому влияние жесткости балочной плиты и реактивных касательных напряжений на расчетные величины плитного фундамента определяют строго в плоской постановке. Затем результаты такого расчета используют для приблизительной оценки влияния указанных факторов на результаты расчетов по действительной пространственной схеме, выполненных по существующим методам без учета этих факторов [1].

Взаимодействие балочной плиты и упругого основания ленточного фундамента с учетом касательных напряжений в зоне контактного взаимодействия по сути является разновидностью контактных задач теории упругости [2], решение которой возможно в нелинейной постановке при работе упругих сред в зоне небольших упруго-пластических деформаций, т. е. с учетом физической нелинейности.

Учет нелинейности деформирования балочной плиты позволяет увеличить, как правило, допустимую нагрузку на плиту за счет перераспределения и уменьшения максимальных значений усилий, но при этом обнаруживается резкое возрастание неравномерности осадок. Данные нелинейного расчета позволяют выполнить достоверную оценку работы конструкции по предельным состояниям эксплуатационной пригодности.

Постановка задачи

Балочная плита ленточных фундаментов неглубокого заложения находится на упругом однородном слое глубиной (толщиной) H с приложенной внешней нагрузкой $q(x)$. Параметры плиты следующие: высота плиты h , ширина плиты $2l$, изгибная жесткость EJ .

Вводим гипотезы (предположения) и допущения для расчета балочных плит на упругом основании:

1) допущения и гипотезы теории упругости справедливы для рассчитываемой области упругого основания;

- 2) допущения и гипотезы плоского изгиба балки (плиты) справедливы для плиты;
- 3) при моделировании контактной зоны между балочной плитой и основанием могут возникать и растягивающие, и сжимающие напряжения, силы трения при моделировании учитываются, также учитываются касательные напряжения в зоне контактного взаимодействия.

Алгоритм решения задачи

Для решения рассматриваемой задачи применяется вариационно-разностный метод (ВРМ) [3], который реализуется в перемещениях через конечно-разностные соотношения теории упругости (случай плоской деформации) при использовании в решении функционала полной потенциальной энергии деформации системы, состоящей из плиты, упругого основания и зоны контактного взаимодействия.

Основание при расчете заменяется прямоугольной расчетной областью, на границах которой перемещения равны нулю; в контактной зоне справедливо равенство осадок основания прогибам плиты.

Основание аппроксимируется разбивочной сеткой конечных размеров с постоянным шагом по осям (рисунок 1).

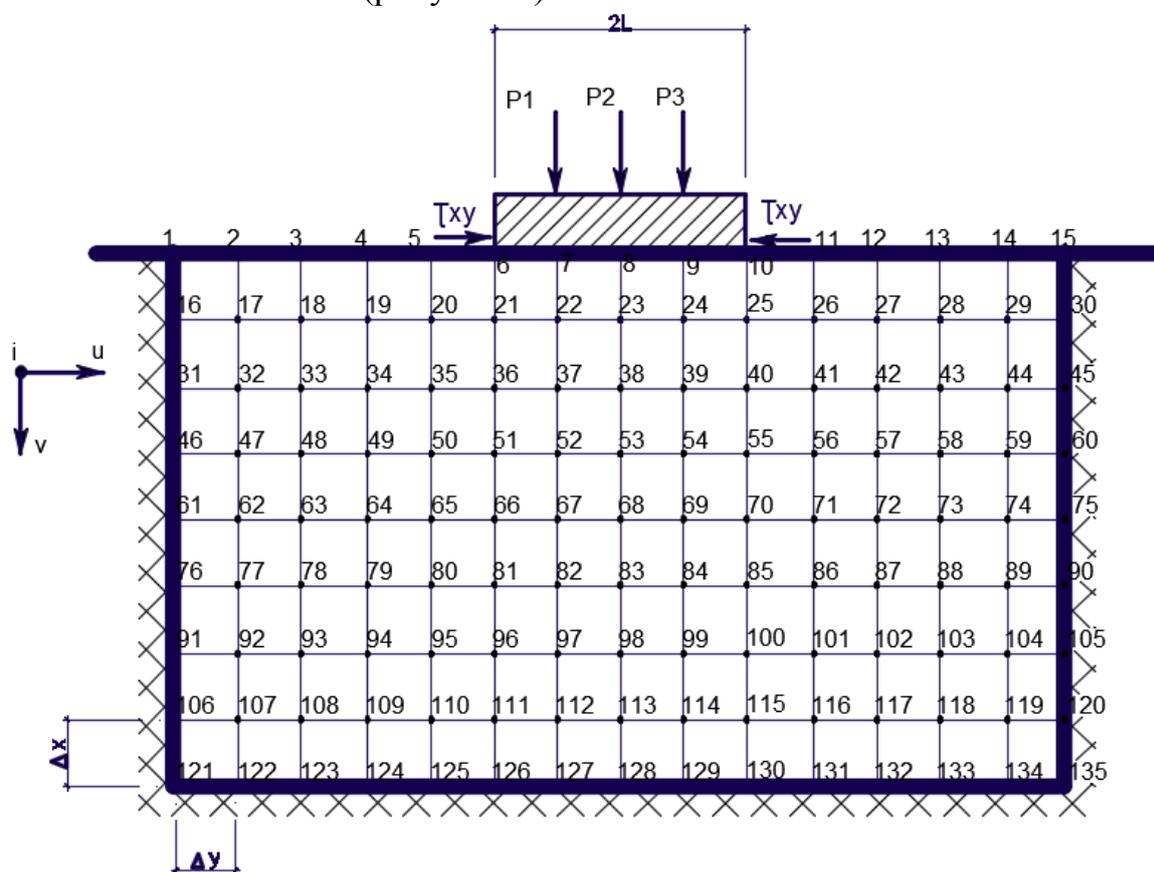


Рисунок 1 – Разбивочная сетка расчетной области

За неизвестные принимаем: $u_i(x,y)$, $v_i(x,y)$ – компоненты вектора перемещения i -той узловой точки основания, направленные вдоль осей X и Y соответственно; $p_y^{(i)}(x,y)$ – реактивные давления в зоне контакта балочной плиты с основанием, $\tau_{xy}^{(i)}(x,y)$ – касательные напряжения.

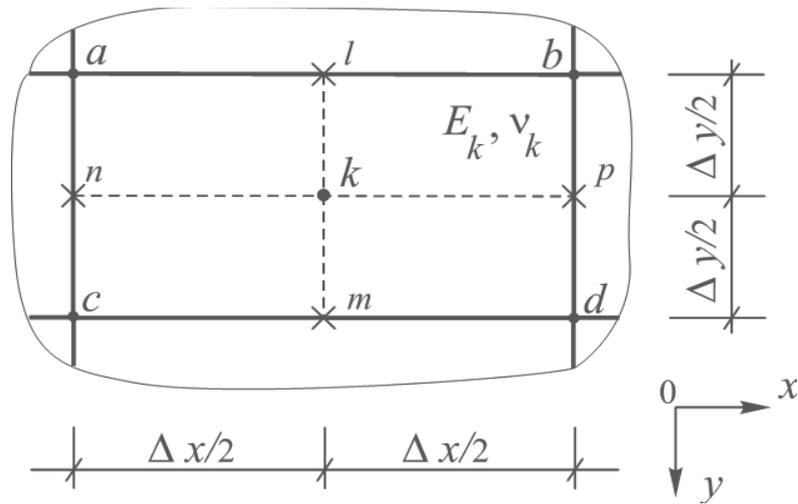


Рисунок 2 – Прямоугольная ячейка метода конечных разностей

Соотношение Коши в выражениях деформаций в точке k

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(k)} &= \frac{\partial u_k}{\partial x} = \left(\frac{u_b + u_d}{2} - \frac{u_a + u_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{u_b + u_d - u_a - u_c}{2\Delta x}; \\ \varepsilon_y^{(k)} &= \frac{\partial v_k}{\partial y} = \left(\frac{v_c + v_d}{2} - \frac{v_a + v_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} = \frac{v_c + v_d - v_a - v_b}{2\Delta y};\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy}^{(k)} &= \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} = \left(\frac{u_c + u_d}{2} - \frac{u_a + u_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} + \left(\frac{v_b + v_d}{2} - \frac{v_a + v_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \\ &= \frac{u_c + u_d - u_a - u_b}{2\Delta y} + \frac{v_b + v_d - v_a - v_c}{2\Delta x}.\end{aligned}\quad (2)$$

Энергия деформаций прямоугольной ячейки

$$U_{i,j}^{(k)} = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \left[\frac{\nu_k}{1-2\nu_k} (\varepsilon_x^{(k)} + \varepsilon_y^{(k)})^2 + (\varepsilon_x^{(k)})^2 + (\varepsilon_y^{(k)})^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^{(k)})^2 \right] \Delta x \Delta y, \quad (3)$$

Величина полной потенциальной энергии балочной плиты на упругом основании \mathcal{E} состоит из энергии деформации плиты U , энергии деформации упругого основания A и работы внешней нагрузки Π

$$\mathcal{E} = U + A + \Pi. \quad (4)$$

В формуле (4), учтены касательные напряжения в контактной зоне в дополнительном слагаемом: энергия продольных деформаций в контактной зоне плиты с основанием, т. е.

$$A = U_f + U_t, \quad (5)$$

где U_f – энергия деформации упругого основания (плоская деформация) [4]; U_t – энергия сил сцепления (продольной деформации) в контактной зоне плиты с основанием.

Энергия деформаций упругого основания

$$U_f = \sum_{j=1}^{MY-1} \left(\sum_{i=1}^{NX-1} U_{i,j}^{(k)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{MY-1} \left(\sum_{i=1}^{NX-1} \left(\frac{E_k}{1+v_k} \cdot \left[\frac{v_k}{1-2v_k} \cdot \left(\frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) + \frac{1}{2\Delta y} (v_c + v_d - v_a - v_b) \right)^2 + \left(\frac{1}{2\Delta x} (u_b + u_d - u_a - u_c) \right)^2 + \left(\frac{1}{2\Delta y} (v_c + v_d - v_a - v_b) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\Delta y} (u_c + u_d - u_a - u_b) + \frac{1}{2\Delta x} (v_b + v_d - v_a - v_c) \right)^2 \right] \Delta x \Delta y \right) \right), \quad (6)$$

где NX – число узлов по оси X ; и MY – число узлов по оси Y .

Энергия сцепления в контактной зоне

$$U_t = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=I+1}^{K1-1} EA_{i=I+1} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \right)^2. \quad (7)$$

Энергия деформации изгиба плиты

$$U = \frac{\Delta x}{2} \sum_{i=I+1}^{K1-1} EJ_{i=I+1} \cdot \left(\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2} \right)^2. \quad (8)$$

Потенциал внешней нагрузки

$$P = - \sum_{i=I+1}^{K1-1} q_i(x) v_i \Delta x. \quad (9)$$

Вначале решается задача в линейной постановке. По вычисленным значениям перемещений i -той узловой точки $u_i(x)$, $v_i(y)$, используя геометрические уравнения Коши и конечно-разностные соотношения (1, 2), определяется интенсивности деформаций и напряжений в центрах ячеек (см. формулы теории упругости).

Имея значения напряжений и перемещений, полученных в результате решения задачи в первом приближении, определяем *касательный или секущий модули деформации* для каждой ячейки и решаем задачу во втором и последующих приближениях, с учетом изгибной и продольных жесткостей балочной плиты.

Итерационный процесс заканчивается, как только разница между последующим и предыдущим приближением исследуемой функции будет соответствовать требуемой точности решения задачи.

Решение задачи

Для решения задачи составлена расчетная программа Mathematica 10.0 и проведена ее числовая апробация для однослойного основания (супесь) – $\sigma_y = 0,25 \text{ МПа}$; $\nu = 0,33$; $E = 10 \text{ МПа}$; железобетонная плита фундамента (бетон марки С20/25), $l = 1,6 \text{ м}$, $h = 0,3 \text{ м}$; $E_o = 2,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, равномерная нагрузка заменяется сосредоточенными силами $P1 = P3 = 100 \text{ кН}$, $P2 = 200 \text{ кН}$. Устанавливаем критерий сходимости 3 %.

На рисунке 3 приведены результаты расчета осадок основания и фундаментной плиты, с учетом касательных напряжений и без них в контактной зоне для первых двух итераций, а также линейный расчет для сравнения. Сходимость составила 2,2 %. Уменьшение осадок – 3,1 %.

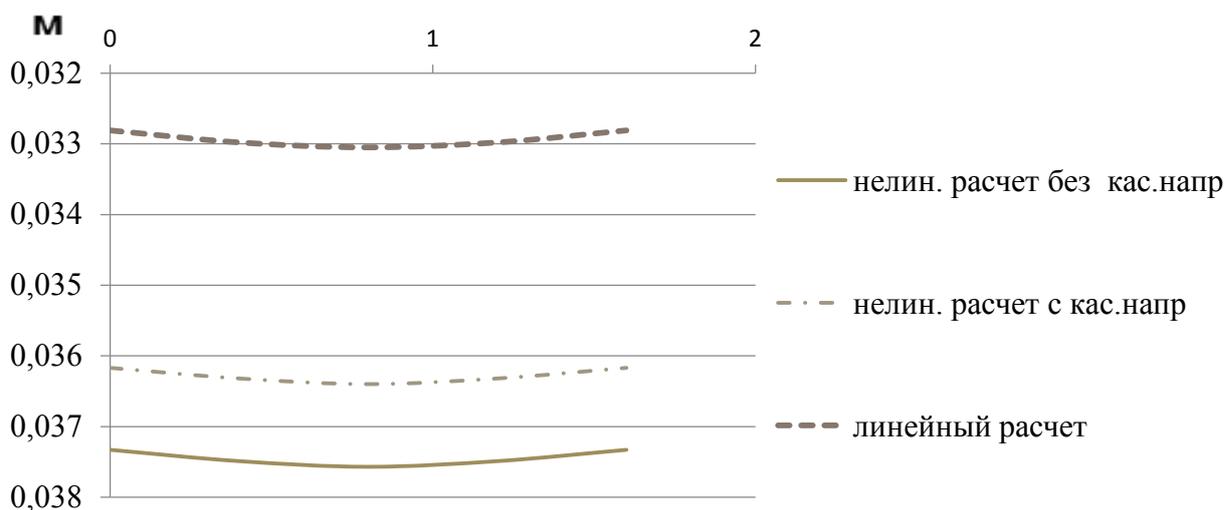


Рисунок 3 – График сравнения результатов осадок

Выводы

Предложенная методика расчета системы балочной плиты с однородным упругим основанием вариационно-разностным методом с использованием конечно-разностных уравнений полной потенциальной энергии, позволяет определить внутренние усилия в балочной плите и осадки упругого основания под плитой, более полно исследовать эту зону биконтактного взаимодействия с учетом касательных напряжений.

Полученные результаты уменьшения осадок (рисунок 3) говорят о влиянии касательных напряжений, что также подтверждается в работах И. И. Гудушаури [6].

Литература

1. Руководство по проектированию плитных фундаментов каркасных зданий и сооружений башенного типа. Разработано к СНиП II-15-74. – М. : Стройиздат., 1984. – 265 с.
2. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности: уч. для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – 2-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2002. – 400 с.
3. Козунова, О. В. Особенности проектирования плитных фундаментов на многослойных основаниях со слабыми слоями грунтов / О. В. Козунова // Рекомендации по проектированию и устройству рациональных фундаментов на основаниях, сложенных озерно-ледниковыми и лессовидными грунтами : Р 5.01.056.09 : введ. 01.10.09. – Минск : Стройтехнорм, 2009. – Гл. 8. – С. 39–47.
4. Козунова, О. В. Статический анализ системы «балочная плита – нелинейно-упругое неоднородное основание» вариационно-разностным методом: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / О. В. Козунова. – Минск, 2017. – 168 л.
5. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 127 с.
6. Гудушаури, И. И. Расчет фундаментных полос на действие симметричных и обратнoсимметричных нагрузок с учетом касательных напряжений на поверхности контакта / И. И. Гудушаури // Известия АН СССР. Механика и машиностроение. – № 5. – 1960. – С. 49–57.