

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ЖЕСТКОСТИ БАЛКИ И ГЛУБИНЫ СЖИМАЕМОЙ ТОЛЩИ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК

О. В. Козунова¹, К. А. Сирош²

¹ *К. т. н., доцент, докторант БНТУ, Минск, Беларусь*

² *М. т. н., аспирант БелГУТ, Гомель, Беларусь*

Реферат

В работе авторами исследуется изменение напряженно-деформированного состояния (НДС) фрагмента регулярной системы перекрестных балок на упругом основании при изменении жесткости и глубины сжимаемой зоны основания (расчетной области).

Принимается, что основание является упругим слоем. Расчетная схема представляет собой пересекающиеся под прямым углом стержни, которые жестко соединены между собой и лежат в плоскости XOY под действием внешней сосредоточенной силы, приложенной в точке пересечения стержней. Сила перпендикулярна плоскости XOY .

Статический расчет осуществляется с использованием вариационно-разностного метода с заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными аппроксимациями.

Численная апробация результатов упругого и нелинейного расчетов системы перекрестных балок на упругом основании осуществлена с использованием программного пакета MATHEMATICA. Построены графики зависимостей.

Ключевые слова: регулярная система перекрестных балок, вариационно-разностный метод, упругое основание, контактная зона, прогибы балки, осадки основания, контактные напряжения, внутренние усилия.

Введение

Контактные задачи изгибаемых конструкций, лежащих на упругом основании, методами теории упругости [1] и строительной механики [2] получили современное развитие в работах белорусских ученых [3–10], в которых учитывались такие усложняющие параметры, как неоднородность упругого основания, физическая нелинейность, конструктивная нелинейность железобетонных элементов и др. Применение вариационных методов в научной литературе для решения контактных задач теории упругости недостаточно освещено, ввиду сложности решения таких задач, в особенности для изгибаемых конструкций.

Методология

Вариационно-разностный метод основан на методе Ритца-Тимошенко с использованием вариационного принципа Лагранжа – Дирихле и заменой дифференциальных уравнений конечно-разностными аппроксимациями. Сущность метода заключается в сведении задачи минимизации функционала полной потен-

циальной энергии фрагмента исследуемой системы с параметрами расчетной области, к задаче минимизации функции многих переменных. Согласно вариационному принципу Лагранжа – Дирихле при нагружении фрагмента исследуемой бесконечной системы на упругом основании статической нагрузкой, ее полная потенциальная энергия в состоянии равновесия имеет минимальное значение.

Рассмотрим регулярную систему перекрестных балок, свободно опирающуюся на упругое основание под действием сосредоточенной нагрузки. Такая система представляет собой совокупность жестко соединенных ортогональных стержней, оси которых совпадают с одной из главных осей инерции балок. Система балок разбивается на расчетные элементы – крестообразные фрагменты (места пересечения балок), соединенные между собой. Изгибные жесткости балок регулярной системы EJ_x , EJ_y равны и постоянны. Внешняя сосредоточенная нагрузка P перпендикулярна плоскости основания. Основание моделируется как упругий однородный слой, ограниченный по толщине сжимаемой толщи, соединенный с несжимаемым основанием.

Кинематические граничные условия. Граница расчетной области основания: горизонтальные перемещения в осях X и Y равняются нулю $u = 0$, $v = 0$. Контактная зона задачи – осадки основания и прогибы балок равны.

Смешанные граничные условия введены для крайних точек балок: поперечные силы Q_z и углы поворота φ_x , φ_y равны нулю.

Основание заменяется расчетной областью из совокупности ячеек и узловых точек, что получено путем аппроксимации основания симметричной объемной разбивочной сеткой, шаг сетки в осях: Δx , Δy , Δz . Для данной задачи получено 96 ячеек и 175 узловых точек (рисунок 1).

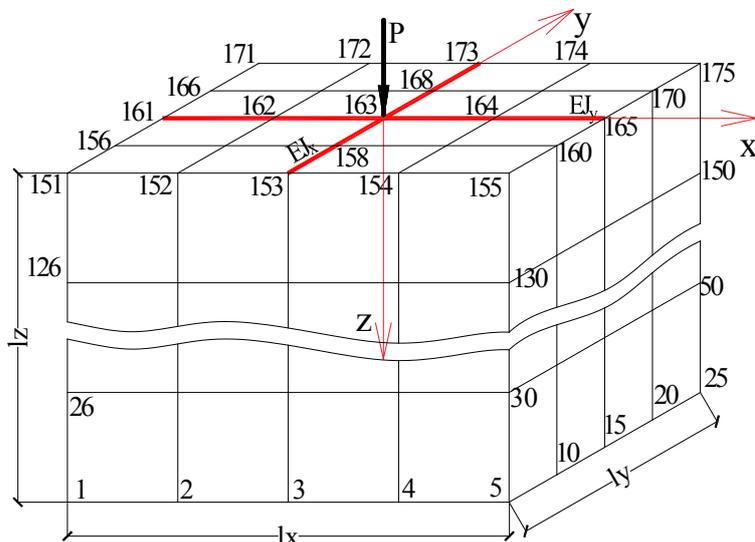


Рисунок 1 – Расчетная область для решения пространственной задачи

Алгоритм расчета регулярной системы перекрестных балок методом Ритца – Тимошенко [8, 11] дает последовательность всех этапов расчета. Подробный алгоритм решения приведен в работе автора [12].

Функционал полной энергии есть сумма полной энергии деформации изотропного основания, энергии изгиба двух перекрестных железобетонных балок и потенциала внешней нагрузки [12].

Полная энергия деформации всего упругого основания

$$U = \iiint_{z y x} U_f dx dy dz = \int_v U_f dv, \quad (1)$$

U_f – функционал энергии деформаций основания для отдельно взятой объемной ячейки [12]; dv – элемент объема расчетной области.

Энергия изгиба крестообразного фрагмента балок есть совокупность энергий изгиба каждой балки (энергия деформаций отождествлена с энергией изгиба конструкции)

$$\Omega = \Omega_x + \Omega_y = \frac{EJ_x}{2} \int_{-l_x}^{l_x} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EJ_y}{2} \int_{-l_y}^{l_y} \left(\frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy, \quad (2)$$

где EJ_x, EJ_y – изгибные жесткости балок.

Потенциал внешней нагрузки определяется из следующей формулы

$$\Pi = - \left(\int_{-l_x}^{l_x} q(x) w(x) dx + \int_{-l_y}^{l_y} q(y) w(y) dy \right). \quad (3)$$

Решение задачи реализуется математически через принятие за неизвестные компоненты вектора узловых перемещений. Неизвестные перемещения будут вычислены из условия тождества производных от полной энергии по каждому из перемещений нулю ввиду минимума функционала полной энергии в состоянии статического равновесия.

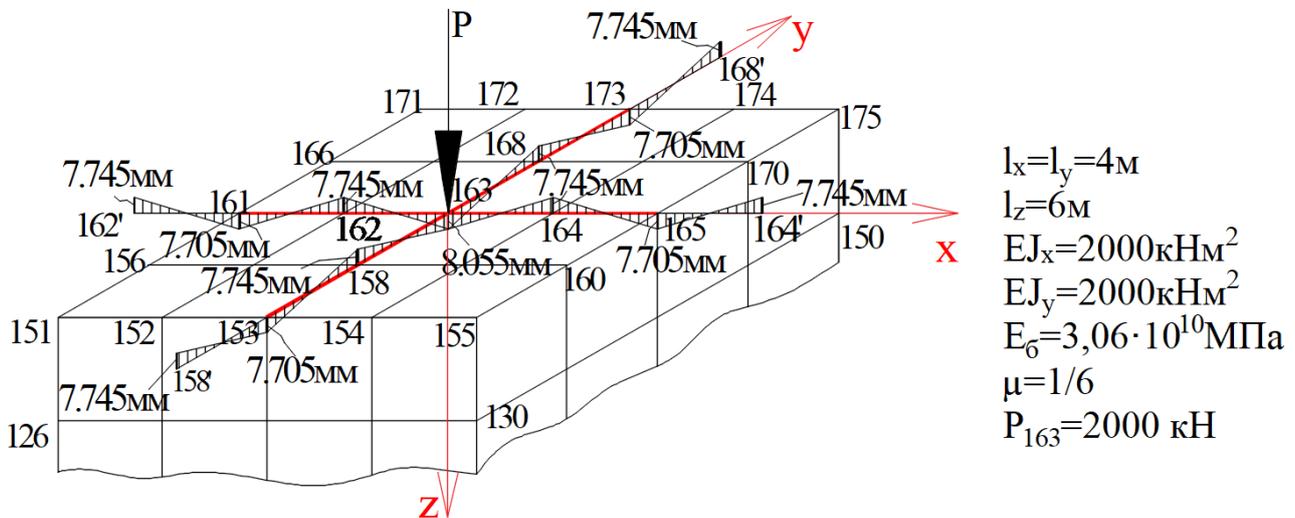


Рисунок 2 – График осадок под внешней нагрузкой P при базовых параметрах

Вертикальные перемещения узловых точек $w_i(z)$ балок вычислялись в проприетарной системе компьютерной алгебры MATHEMATICA.

Внутренние усилия, возникающие в балках, и контактные напряжения в контактной зоне балок с основанием определяются по вычисленным вертикальным перемещениям $w_i(z)$ с учетом граничных условий в контактной зоне через формулы аппроксимации производных [13]. С учетом кинематических граничных условий (равенство нулю горизонтальных перемещений на границе расчетной области), перемещения контурных точек обнуляются.

Ввиду того, что внешняя нагрузка P_{163} действует на систему балок, ее можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$P_{163} = P_x^{(163)} + P_y^{(163)}, \text{ где } P_x^{(163)} = P_y^{(163)} = P_{163}/2 = 2000/2 = 1000 \text{ кН.}$$

Каждая из составляющих представляет собой совокупность трех сил, приложенных в узлах балки:

$$P_x^{(163)} = P_x^{(2)} + P_x^{(3)} + P_x^{(4)}; \quad P_y^{(163)} = P_y^{(2')} + P_y^{(3')} + P_y^{(4')}. \quad (4)$$

Вычислим значение каждой силы (см. рис.3):

$$P_x^{(2)} = P_x^{(4)} = \frac{P_x^{(163)}}{4} = \frac{1000}{4} = 250 \text{ кН}; \quad P_y^{(2')} = P_y^{(4')} = \frac{P_y^{(163)}}{4} = \frac{1000}{4} = 250 \text{ кН};$$

$$P_x^{(3)} = \frac{P_x^{(163)}}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ кН}; \quad P_y^{(3')} = \frac{P_y^{(163)}}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ кН.}$$

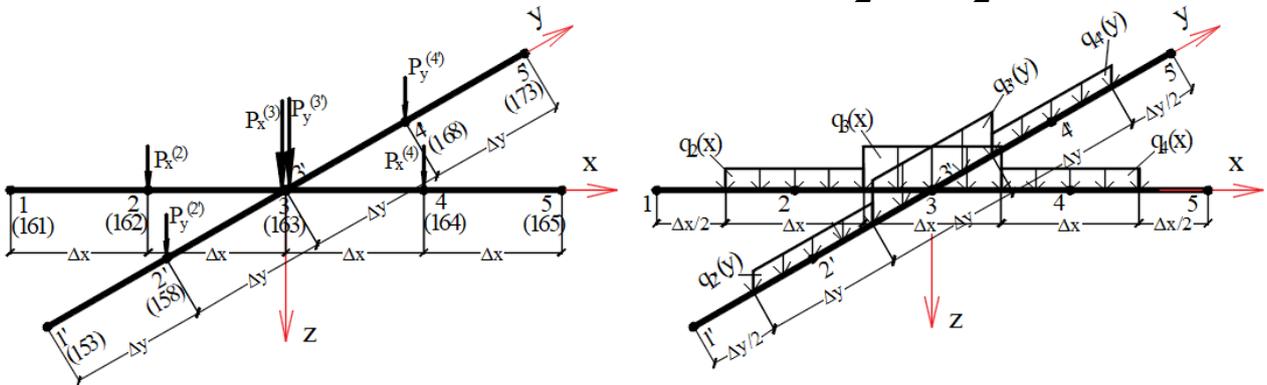


Рисунок 3 – К расчету контактных напряжений и внутренних усилий

Для вычисления контактных напряжений сосредоточенные силы заменяются на распределенные:

$$\begin{aligned} q_2(x) = q_4(x) &= \frac{P_x^{(2)}}{\Delta x} = \frac{P_x^{(4)}}{\Delta x} = \frac{250}{1} = 250 \text{ кН / м,} \\ q_3(x) &= \frac{P_x^{(3)}}{\Delta x} = \frac{500}{1} = 500 \text{ кН / м,} \\ q_2'(y) = q_4'(y) &= \frac{P_y^{(2')}}{\Delta y} = \frac{P_y^{(4')}}{\Delta y} = \frac{250}{1} = 250 \text{ кН / м,} \\ q_3'(y) &= \frac{P_y^{(3')}}{\Delta y} = \frac{500}{1} = 500 \text{ кН / м.} \end{aligned} \quad (5)$$

Контактные напряжения в конечно-разностном представлении [14]:

$$\begin{aligned} p_z^{(k)} &= q_k(x) - EJ_{y \ i=i+1} \frac{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}}{\Delta x^4}, \\ p_z^{(k')} &= q_k'(y) - EJ_{x \ i'=i'+1} \frac{w'_{i'-2} - 4w'_{i'-1} + 6w'_{i'} - 4w'_{i'+1} + w'_{i'+2}}{\Delta y^4}, \end{aligned} \quad (6)$$

$EJ_{y \ i=i+1}$, $EJ_{x \ i'=i'+1}$ – изгибная жесткость балок;
 I_1, I'_1 – номер узла начала балок.

Моменты, возникающие в железобетонных балках регулярной системы, в конечно-разностном виде [14]:

$$M^{(k)} = -EJ_{y \ i=i_1+1} \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{\Delta x^2}, \quad (7)$$

$$M^{(k')} = -EJ_{x \ i'=i'_1+1} \frac{w_{i'-1} - 2w_{i'} + w_{i'+1}}{\Delta y^2}.$$

Задача 1. Исследуется изменение напряженно-деформированного состояния (НДС) регулярной системы перекрестных балок при изменении глубины сжимаемой зоны основания. Результаты решения представлены в табличном и графическом виде.

Таблица 1 – Результаты решения задачи 1

Глубина сжимаемой толщи основания l_z , м	Узловые точки				
	1 (161)	2 (162)	3 (163)	4 (164)	5 (165)
	1'(153)	2'(158)	3'(163)	4'(168)	5'(173)
Перемещения w_x, w_y , м					
3	0,00760870	-0,00772803	0,00818525	-0,00772803	0,00760870
4	0,00752035	-0,00770343	0,00832279	-0,00770343	0,00752035
5	0,00765494	-0,00773850	0,00811805	-0,00773850	0,00765494
6	0,00770510	-0,00774517	0,00805456	-0,00774517	0,00770510

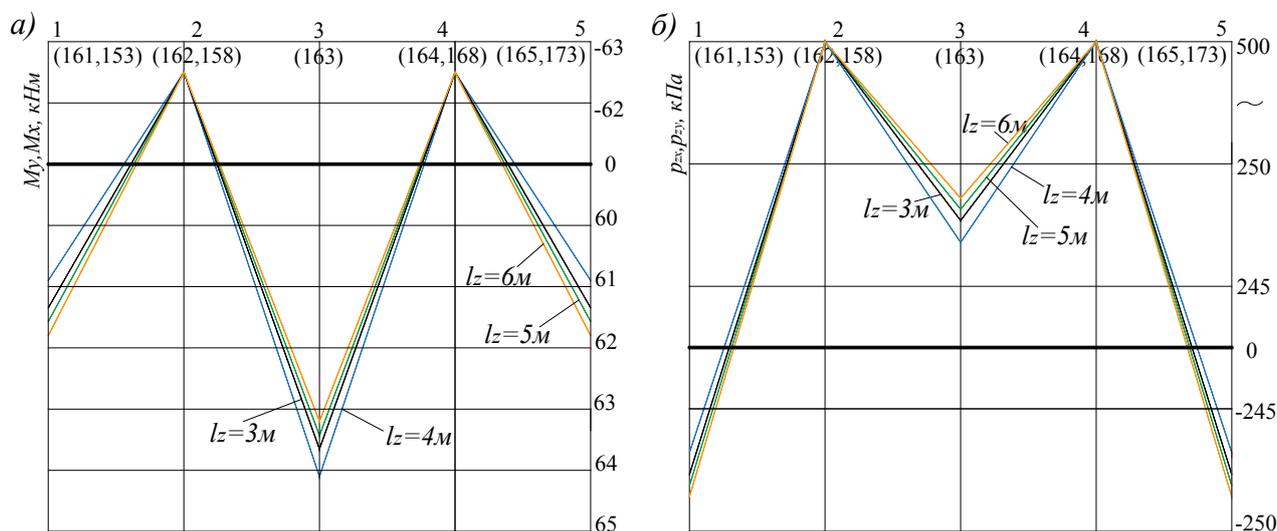


Рисунок 4 – эпюры моментов M_y (изгиб XOZ) и M_x (изгиб YOZ), а); график контактных напряжений p_{zx} (вдоль оси x), p_{zy} (вдоль оси y), б)

Задача 2. Исследуется изменение НДС регулярной системы перекрестных балок при изменении изгибной жесткости. Результаты представлены в табличном и графическом виде.

Таблица 2 – Результаты решения задачи 2

Изгибная жесткость EJ_y, EJ_x кНм^2	Узловые точки				
	1 (161)	2 (162)	3 (163)	4 (164)	5 (165)
	1' (153)	2' (158)	3' (163)	4' (168)	5' (173)
Перемещения $w_x, w_y, \text{м}$					
1500	0,00777083	-0,00773658	0,00800601	-0,00773658	0,00777083
2000	0,00770510	-0,00774517	0,00805456	-0,00774517	0,00770510
2500	0,00614272	-0,00618267	0,00649194	-0,00618267	0,00614272
3000	0,00510116	-0,00514101	0,00545015	-0,00514101	0,00510116

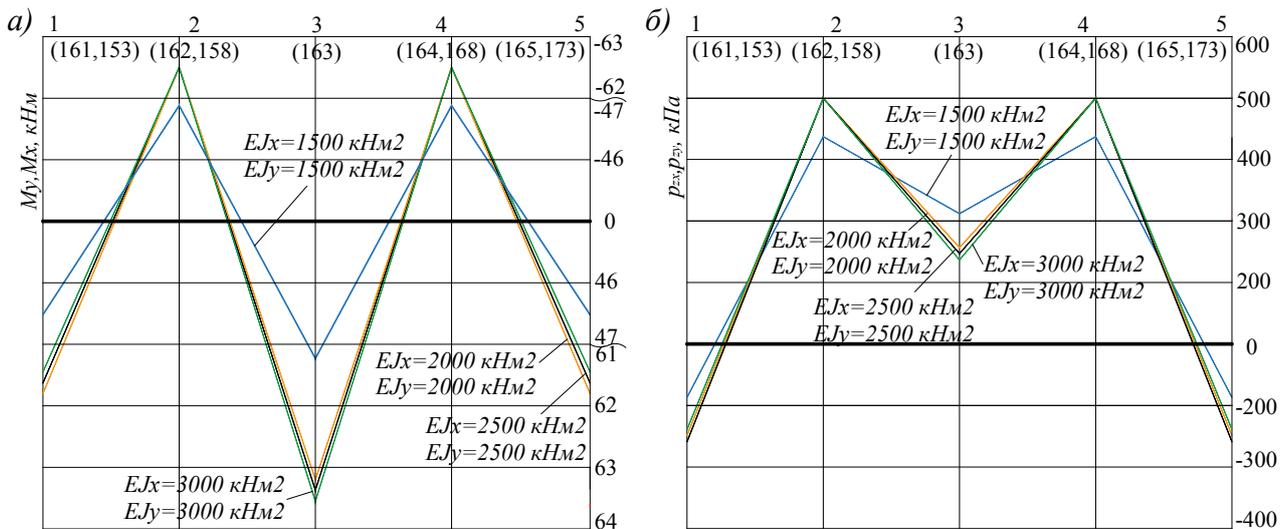


Рисунок 5 – эпюры моментов M_y (изгиб XOZ) и M_x (изгиб YOZ), а); график контактных напряжений p_{zx} (вдоль оси x), p_{zy} (вдоль оси y), б)

Выводы

При увеличении глубины сжимаемого слоя основания наблюдается общая тенденция к увеличению осадок (перемещений) до 1,8 %, а в точке приложения сосредоточенной нагрузки P отмечено уменьшение осадок до 2,5 %. Значения моментов растут на концах балок с разницей до 1,1 %, но уменьшаются в центре балок (в месте приложения внешней силы) на каждом шаге до 1 %. Контактные напряжения растут до 0,6 % с увеличением глубины на 1 м.

Увеличение жесткости на каждые 500 кНм^2 приводит к значительному уменьшению осадок, и может доходить до 20 %. Для жесткостей в диапазоне от 2000 кНм^2 до 3000 кНм^2 наблюдается незначительное увеличение моментов (до 0,3 %) и уменьшение контактных напряжений (до 0,1 %). Стоит отметить, при жесткости равной 1500 кНм^2 моменты меньше на 25 %, а контактные напряжения меняют характер распределения – рост в месте приложения силы на 20 % и уменьшение на краях расчетной области на 25 % в сравнении с решением задачи для значения жесткости 2000 кНм^2 .

Характер распределения контактных напряжений в рассматриваемых задачах имеет седловидную форму.

Литература

1. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М. : Высшая школа, 1990. – 400 с.
2. Ржаницын, Р. А. Строительная механика / Р. А. Ржаницын. – М. : Высшая школа, 1991. – 439 с.
3. Босаков, С. В. Расчет системы перекрестных балок на двухслойном основании / С. В. Босаков, Я. Д. Семенюк // Вестник БПИ. – 2000. – № 1 : Строительство и архитектура. – С. 14–16.
4. Босаков, С. В. Расчет железобетонных пространственных фундаментов, как системы перекрестных балок, на упругом основании с учетом ползучести бетона / С. В. Босаков, С. Д. Семенюк // Вестник БрГТУ. – 2001. – № 1 : Строительство и архитектура. – С. 13–16.
5. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 127 с.
6. Босаков, С. В. Расчет балочной плиты на упругом основании Винклера при одностороннем контакте / С. В. Босаков, К. В. Дмитриева // Актуальные проблемы расчета зданий, конструкций и их частей: теория и практика. – Минск : УП «Технопринт», 2002. – С. 47–51.
7. Семенюк, С. Д. Железобетонные и пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформированном основании / С. Д. Семенюк. – Могилев : Бел.-Рос. университет, 2003. – 269 с.
8. Босаков, С. В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости: монография / С. В. Босаков. – Брест : БрГТУ, 2006. – 107 с.
9. Босаков, С. В. Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета (Часть 1) / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Вестник БНТУ. – 2009. – № 1. – С. 5–13.
10. Guenfoud, S. A Ritz's method based solution for the contact problem of a deformable rectangular plate on an elastic quarter-space / S. Guenfoud, S. V. Bosakov, D. F. Laefer // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – Vol. 47. – P. 1822–1829.
11. Козунова, О. В. Расчет бесконечной системы перекрестных балок на упругом основании вариационно-разностным методом / О. В. Козунова, К. А. Сирош // Вестник ПГУ. Серия Ф. – 2021. – С. 65–71.
12. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гульдер. – М. : Наука, 1974. – 560 с.
13. Ильин, В. П. Численные методы решения задач строительной механики : справочное пособие / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. – Минск : Высшая школа, 1990. – 346 с.
14. Козунова, О. В. Учет физической нелинейности в железобетонных балках регулярной системы перекрестных лент на изотропном основании / О. В. Козунова, К. А. Сирош // Безопасный и комфортный город : сб. науч. трудов по материалам V междунар. науч.-практ. конф., Орел, 06–08 июня 2022 г. – Орел : ОГУ им. И. С. Тургенева, 2022. – С. 283–288.

15. Wieghardt, K. Uber den balken auf nachgiebiger unterlage / K. Wieghardt // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1922. – Vol. 2. – S. 165–184.

16. Мурашев, В. Н. Трещиностойкость, жесткость и прочность железобетона (Основы сопротивления железобетона) / В. Н. Мурашев. – М. : Министерство строительства предприятий машиностроения, 1950. – 268 с.

17. Босаков, С. В. Развитие теории расчета шарнирно-соединенных балок на упругом основании с учетом их физической нелинейности / С. В. Босаков, О. В. Козунова // Проблемы современного бетона и железобетона: сб. науч. тр. / Ин-т БелНИИС ; редкол.: О. Н. Лешкевич [и др.]. – Минск, 2019. – Вып. 11. – С. 11–24.

УДК 624.072

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВРМ В НЕЛИНЕЙНЫХ РАСЧЕТАХ ФУНДАМЕНТНЫХ ПЛИТ С УЧЕТОМ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ КОНТАКТА

А. Г. Пусенков

*М. т. н. БелГУТ, главный инженер завода КПД ОАО «Гомельский ДСК», Гомель,
Беларусь, pusenkov_a@mail.ru*

Реферат

Расчет упругого основания и балочной плиты с учетом касательных напряжений в общем виде является чрезвычайно сложной биконтактной задачей (т. е. задачей с двумя контактными поверхностями). Взаимодействие балочной плиты и упругого основания с учетом касательных напряжений в зоне контактного взаимодействия по сути является разновидностью контактных задач теории упругости, решение которой возможно в нелинейной постановке при работе упругих сред в зоне небольших упруго-пластических деформаций, т. е. с учетом физической нелинейности.

Учет нелинейности деформирования балочной плиты позволяет увеличить, как правило, допустимую нагрузку на плиту за счет перераспределения и уменьшения максимальных значений усилий, но при этом обнаруживается резкое возрастание неравномерности осадок. Данные нелинейного расчета позволяют выполнить достоверную оценку работы конструкции по предельным состояниям эксплуатационной пригодности.

Для решения рассматриваемой задачи применяется вариационно-разностный метод (ВРМ), который реализуется в перемещениях через конечно-разностные соотношения теории упругости (случай плоской деформации) при использовании в решении функционала полной потенциальной энергии деформации системы, состоящей из плиты, упругого основания, зоны контактного взаимодействия и внешней нагрузки.