Д. А. БУДЬКО
БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

ПЛОСКАЯ КРУГОВАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ЧЕТЫРЁХ ТЕЛ: ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассматриваемая в этой работе круговая ограниченная задача четырёх тел является обобщением знаменитой круговой ограниченной задачи трёх тел [1]. Три тела P_0, P_1, P_2, обладающие массами m_0, m_1, m_2, соответственно, движутся равномерно по круговым Кеплеровским орбитам вокруг общего центра масс, образуя в любой момент времени равносторонний треугольник. В литературе соответствующее точное решение задачи трёх тел известно как треугольное решение Лагранжа. Четвёртое тело P_3, обладающее пренебрежимо малой массой, движется в гравитационном поле, создаваемом телами P_0, P_1, P_2, и тогда обычно ставится задача об исследовании движения тела P_3.

Ранее в работах [2, 3] были найдены все восемь положений равновесия при малых значениях параметров μ_1, μ_2, и показано, что только три из них являются устойчивыми в линейном приближении. Далее используем методы, приведенные в [4], строим каноническое преобразование, приводящее функцию Гамильтона к нормальной форме с точностью до членов шестого порядка включительно, и применяем теоремы КАМ-теории [1]. В результате получаем теорему об устойчивости в смысле Ляпунова положений равновесия для почти всех значений параметров μ_1, μ_2 из области линейной устойчивости.

Все символьные преобразования и численные расчёты выполнены с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica.

ЛИТЕРАТУРА
1. Маркеев, А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике / А.П. Маркеев. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
2. Будько, Д.А. Равновесные решения и их линейная устойчивость в ограниченной задаче четырёх тел / Д.А. Будько // Вести БГПУ. Серия 3. – 2011. – № 2. – С. 11–15.
3. Будько, Д.А. Исследование устойчивости равновесных решений ограниченной задачи четырёх тел / Д.А. Будько // Известия НАН Беларуси. Серия физ.-мат. наук. – 2011. – № 4. – С. 55–59.
4. Gadomski, L. Studying the stability of equilibrium solutions in the planar circular restricted four-body problem / L. Gadomski, E.A. Grebenikov, A.N. Prokopenya // Nonlinear oscillations. – 2007. – Vol. 10, № 1. – P. 66–82.

А. А. ВОЛЧЕК, Л. П. МАХНИСТ, В. С. РУБАНОВ, И. И. ГЛАДКИЙ
БрГТУ (г. Брест, Беларусь)

ОБ ОЦЕНКАХ ПАРАМЕТРОВ ОДНОЙ ИЗ МОДЕЛЕЙ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА

Рассмотрим марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть $\overline{V}$ – среднегодовой расход воды, а V_t – расход воды в момент времени *t*. Тогда, полагая $X_t = (V_t - \overline{V})/\overline{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна–Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + s\,dW_t \qquad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс (так что $\dfrac{dW_t}{dt} = \dot{W}_t$ – обобщенный случайный процесс белого шума с параметром $s = C_V\sqrt{2k}$);

C_V – коэффициент вариации;

k^{-1} – время релаксации речного стока.

Орнштейна–Уленбека процесс является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с коэффициентом сноса $a(t,x) = -kx$ и диффузии $s(t,x) = s^2$, переходная плотность вероятности $p(t, x, y)$ которого является фундаментальным решением соответствующего уравнения Фоккера–Планка (т. е. прямого уравнения Колмогорова) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial y}(yp) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

где коэффициент k определяется по формуле $k = -\ln r$, так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид e^{-kt}, а r – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ сток равен x, а x_* – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение V будет находиться в полуинтервале $[x_*, \infty)$ при условии, что $x \in [x_*, +\infty)$. Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ, однородны по времени, обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x,y) = -kx\frac{\partial}{\partial x}p(t,x,y) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Пусть T – момент времени, в который значение V покинет промежуток $[x_*, +\infty)$. Тогда $prob(T \geq t) = G(t,x), G(t,x) = \int\limits_{x_*}^{+\infty} p(t,x,y)dy$.

Так как функция $1 - G(t,x)$ является распределением случайной величины T, то моменты n-ого порядка времени достижения границы x_* определяются соотношениями $T_k = -\int\limits_0^{+\infty} t^k \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt = \int\limits_0^{+\infty} kt^{k-1}G(t,x)dt$.

Интегрируя по t на интервале от 0 до $+\infty$ соотношение (2), получаем следующие уравнения для T_n:

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_n}{dx^2} - kx\frac{dT_n}{dx} = -nT_{n-1}, \text{ при } \frac{dT_n}{dx}(+\infty) = 0,\ T_n(x)\Big|_{x=x_*} = 0\ (T_0 = 1).$$

Введя безразмерные величины

$$kT_1 = q_1,\ k^2T_2 = q_2,\ x\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x}{C_V} = x,\ x_*\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x_*}{C_V} = x_*,$$

приходим к системе для оценки математического ожидания T_1 и среднего квадратичного отклонения $\sqrt{T_2 - T_1^2}$:

$$\frac{d^2q_1}{dx^2} - x\frac{dq_1}{dx} = -1, \frac{d^2q_2}{dx^2} - x\frac{dq_2}{dx} = -2q_1, \frac{dq_i}{dx}(+\infty) = 0, q_i(x)\Big|_{x=x_*} = 0. \tag{3}$$

Система (3), приведенная в [1], при решении различных прикладных задач интегрировалась численными методами. В данной работе рассматриваются вопросы сходимости решения системы (1), записанного в виде степенных рядов [2]:

$$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*),\ \theta_2(\xi) = 2\left(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\right), \text{ где}$$

$$S_1(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}, \tag{4}$$

$$S_2(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\left(\ln\left(2 - 2\left\{\frac{k-1}{2}\right\}\right) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{1}{m - \left\{\frac{k}{2}\right\}}\right)\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}, \tag{5}$$

а $[t]$ и $\{t\}$ – целая и дробная часть числа t соответственно.

Степенной ряд (4) получен в [2]. В [2] предложено теоретическое обоснование асимптотического поведения математического ожидания, рассматриваемого распределения вероятностей многолетних колебаний речного стока, широко используемого в практике гидрологических расчетов. Предлагаемая в [3] методика решения уравнений вида (3) обобщена на более широкий класс уравнений такого типа, для чего исследовались функции специального вида, связанные соотношениями с интегралами Эйлера первого и второго рода и неполной гамма-функцией. Сходимость ряда (4) рассматривалась в [3].

В работе исследуется решение $q_2(x) = 2\big(S_2(x) - S_2(x_*) - S_1(x_*)q_1(x)\big)$, где

$$S_2(x) = A_2(x) - B_2(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\ln 2 - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$$ на сходимость.

Доказано, что остатки рядов $A_2(\xi), B_2(\xi)$ удовлетворяют неравенствам: $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^{(2)}\right| \le \frac{\left|a_n^{(2)}\right|}{1-q}$, $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k^{(2)} \le \frac{b_n^{(2)}}{1-q}$ и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q, где $a_n^{(2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\ln 2 - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ и $b_n^{(2)} = \left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$.

Тогда значения рядов $A_2(\xi)$, $B_2(\xi)$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$ можно получить, вычисляя n-ые частичные суммы этих рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)}$, $\sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(2)}$, если выполняются неравенства:

$$\left|a_n^{(2)}\right| \le \varepsilon(1-q),\ b_n^{(2)} \le \varepsilon(1-q), \text{ и } n \ge n_0 = \max\left(\left[\frac{\xi^2}{2q}\right];5\right). \qquad (6)$$

Рассматривается пример, приведенный в [1], о среднегодовом стоке Волги, где с использованием решения системы (4), (5) и условий (6) получены оценки параметров соответствующего распределения вероятностей.

Результаты исследований можно применить при расчете и прогнозе многолетних колебаний речного стока рек Беларуси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – 2002. – Т. 29, № 1. – С. 62–67.

2. Волчек, А.А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из задач стохастической гидрологии / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: тезисы докладов международной научной конференции, Минск, 7–10 дек. 2010 г. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С. 105.

3. Волчек, А.А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка, матэматыка. – 2010. – № 1. – С. 68–77.

Н. В. ГУЦКО[1], Ю. В. ЛУЦЕНКО[2], А. Э. ШМИГИРЕВ[3]
[1, 3]МГПУ им. И. П. Шамякина (г. Мозырь, Беларусь)
[2]БГУ им. акад. И. Г. Петровского (г. Брянск, Россия)

О СТРОЕНИИ ГРУПП ШМИДТА С ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПЕРВЫМИ И ЧЕТВЕРТЫМИ МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Все группы в данной статье являются конечными. Напомним ряд понятий, используемых в данной работе. Подгруппа H группы G называется *2-максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и далее. *Группа Шмидта* – это конечная ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны.