А. И. БАСИК[1], Е. В. ГРИЦУК[2], Д. В. ГАЛУЦ[1]
[1]Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина
[2]Брест, БрГТУ

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbf{R}^4$

Рассмотрим систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\sum_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

где $U = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x))^T$ – искомая четырехкомпонентная вектор-функция, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$, $A_1 = E$ – единичная матрица четвертого порядка,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при $\xi \in \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$

$$\det(A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 + A_4\xi_4) = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2)^2 \neq 0,$$

что доказывает эллиптичность системы (1).

Поскольку

$$A_2 A_3^{-1} + A_3 A_2^{-1} \neq 0,$$

то система (1) не является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана [1]. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Каждая компонента* u_k $(k = 1,2,3,4)$ *произвольного непрерывно дифференцируемого решения* U *системы* (1) *является бигармонической в* $\mathbf{R}^4$ *функцией.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1118–1125.