

УДК 519.2

И.Н. МЕЛЬНИКОВА

Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ**

Для некоторой совокупности частиц, каждая из которых с течением времени превращается в частицы такого же типа, рассмотрим процесс «размножения», который обладает следующим свойством: каждая из исходных частиц через время t независимо друг от друга и от обстоятельств, предшествующих исходному моменту, с одинаковой для всех частиц вероятностью $P_k(t)$ порождает группу из k частиц. Через $\xi(t)$ обозначим число частиц, имеющих к моменту времени t . Такая эволюция величины $\xi(t)$ представляет собой марковский случайный процесс. Процесс такого типа называется ветвящимся. Описанная модель может быть использована при рассмотрении многих реальных процессов, в том числе и для изучения эффектов вырождения и взрыва.

Пусть в некоторый исходный момент времени s , скажем $s=0$, имеется ровно k частиц. Обозначим $\xi_i(t)$ число частиц, порожденных i -той частицей ($i=1,2,\dots,k$) через время t . Тогда общее число частиц через время t будет

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \dots + \xi_k(t). \quad (1)$$

Здесь случайные величины $\xi_i(t), \dots, \xi_k(t)$ независимы между собой и имеют одно и то же распределение вероятностей:

$$P(\xi_i(t)=n) = p_n(t), \quad n=0,1,\dots \quad (2)$$

Введем производящие функции

$$F(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n, \quad (3)$$

$$F_k(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{kn}(t) z^n,$$

где $p_{nk}(t)$ есть вероятности марковского ветвящегося процесса, $\zeta(t) = (p_{kn}(t))$ есть вероятность того, что k частиц за время t порождают n частиц.

Предположим, что отдельная частица за малый промежуток времени Δt с вероятностью

$$p_n(\Delta t) = \lambda_n \Delta t + \lambda(\Delta t), \quad n \neq 1 \quad (4)$$

превращается в n новых частиц, а с вероятностью

$$p_n(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t - \lambda(\Delta t) \quad (5)$$

остаётся неизменной. Пусть, далее при

$$\lambda_1 = -\lambda, \quad \text{где } \sum_k \lambda_k = 0, \quad (6)$$

переходные вероятности $p_n(t) = p_{1n}(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям Колмогорова

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = \sum_k \lambda_k p_{kn}(t), n = 0, 1, \dots \quad (7)$$

При каждом z , $0 \leq z \leq 1$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{d}{dt} p_n(t) = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n = \sum_k \lambda_k \sum_{n=0}^{\infty} p_{kn}(t) z^n,$$

что дает следующее дифференциальное уравнение для производящей функции $F(t, z)$

$$\frac{d}{dt} F_n(t, z) = \sum_k \lambda_k F_k(t, z).$$

Здесь $F(t, z)$ — функции, определенные формулой (3), — являются производящими функциями случайной величины $\zeta(t)$ для k исходных частиц, где $k = 0, 1, \dots$ Эта величина $\zeta(t)$, согласно равенству (1), есть сумма k независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение вероятностей с производящей функцией $F(t, z)$. Поэтому

$$F_k(t, z) = [F(t, z)]^k, k = 0, 1, \dots$$

это равенство имеет место и при $k = 0$, так что дифференциальное уравнение для производящей функции $F(t, z)$ может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dt} F(t, z) = \sum_k \lambda_k F(t, z)^k. \quad (8)$$

Будем считать, что заданными параметрами ветвящегося процесса $\zeta(t)$ являются плотности перехода λ_k , $k = 0, 1, \dots$ Введем функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x^k. \quad (9)$$

Она является аналитической при $0 < x < 1$, и формула (9) дает ее разложение в степенной ряд. Согласно равенству (8), производящая функция $F(t, z)$ является решением дифференциального уравнения вида

$$\frac{dF}{dt} = f(x). \quad (10)$$

Поскольку $F(0, z) = z$, производящая функция $F(t, z)$ при каждом z , $0 \leq z \leq 1$, совпадает с решением $x = x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию $x(0) = z$. Вместо уравнения (10) удобно рассмотреть эквивалентное ему дифференциальное уравнение для обратной к $x = x(t)$ функции $t = t(x)$. Как решение этого уравнения функция $t = t(x)$ имеет вид

$$t = \int_z^x \frac{du}{f'(u)}, 0 \leq x \leq 1.$$