УДК 556.16.06

**С.И. ПАРФОМУК, Ю.П. АШАЕВ, С.В. МУХОВ**
Брест, БрГТУ

# ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

В настоящее время для прогнозирования стока используются методы, основанные на применении математических моделей. Широкое распространение получили исследования по созданию детерминистических моделей процессов формирования речного стока с помощью методов математической физики и их использованию в гидрологических прогнозах и расчетах [1].

Прогнозируемое потепление климата повлечет изменения стока, поэтому необходимо использование существующих и создание новых моделей прогнозирования изменения стока, учитывающих природно-климатические изменения, а также степень антропогенного воздействия на водные объекты. Целью данного исследования была разработка методики прогнозирования изменения речного стока с применением малопараметрических нелинейных динамических моделей для р. Висла – г. Варшава.

Пусть $\overline{Q}$ – средний многолетний расход воды, а $Q_t$ – расход воды в $t$-ый момент времени. Тогда, приняв $X_t = (Q_t - \overline{Q})/\overline{Q}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью следующего стохастического дифференциального уравнения Орштейна-Уленбека с непрерывным временем $t$ [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma dW_t, \qquad (1)$$

где $k^{-1}$ – время релаксации речного стока; $\sigma$ – интенсивность «белого шума»; $W_t$ – стандартный винеровский процесс.

Интенсивность «белого шума» определяется как

$$\sigma = C_v \sqrt{2k},$$

где $C_v$ – коэффициент вариации речного стока, а коэффициент $k$ из следующего соотношения:

$$k = -\ln r,$$

где $r$ – автокорреляционная функция колебаний речного стока.

Уравнению (1) соответствует уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(kxp) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \qquad (2)$$

а обратное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x,t/y,0)=-ky\frac{\partial}{\partial y}p(x,t/y,0)+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 p(x,t/y,0)}{\partial y^2},\quad -\infty<x<\infty,\ (3)$$

т. к. случайные колебания стока однородны во времени, а значит, имеет место соотношение

$$p(x,t/y,0)=p(x,0/y,t).$$

Рассмотрим следующую задачу стохастической гидрологии. Пусть в начальный момент времени $t=0$ сток $x$ равен $Q$, а $Q_*$ – некоторое фиксированное значение стока. Требуется определить период времени, в течение которого значение стока будет находиться в пределах $[Q_*,\infty)$. Пусть $T$ – момент времени, когда значение стока покинет полуинтервал $[Q_*,\infty)$. Тогда

$$prob(T\geq t)=G(Q,t)\quad G(Q,t)=\int_{Q_*}^{\infty}p(x,t/y,0)dx.$$

Интегрируя (3) от $Q_*$ до $\infty$ по $x$, получим

$$\frac{\partial G(Q,t)}{\partial t}=-kQ\frac{\partial G(Q,t)}{\partial Q}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 G(Q,t)}{\partial Q^2}.$$

Граничные условия определяются, исходя из поглощения значения функции при $Q=Q_*$, а также из отражения на бесконечности, т. е.

$$G(Q,t)\big|_{Q=Q_*}=0,\quad \left.\frac{\partial G(Q,t)}{\partial Q}\right|_{Q=\infty}=0.$$

Среднее время достижения границы $Q_*$ определяется следующим соотношением:

$$T_1=-\int_0^{\infty}t\frac{\partial G(Q,t)}{\partial t}dt=\int_0^{\infty}G(Q,t)dt.$$

Интегрируя (3) по $t$ от 0 до $\infty$ и учитывая, что

$$\int_0^{\infty}\frac{\partial G}{\partial t}dt=G(x,\infty)-G(x,0)=-1,$$

получим следующее уравнение для $T_1$:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\frac{d^2T_1}{dQ^2}-kQ\frac{dT_1}{dQ}=-1 \text{ при } \left.\frac{dT_1}{dQ}\right|_{Q=\infty}=0,\quad T_1(Q)\big|_{Q=Q_*}=0.$$

Введя безразмерные величины

$$\theta_1=kT_1,\quad \xi=Q\sqrt{\frac{2k}{\sigma^2}}=\frac{Q}{C_v},\quad \xi_*=Q_*\sqrt{\frac{2k}{\sigma^2}}=\frac{Q_*}{C_v},$$

получим

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \left.\frac{d\theta_1}{d\xi}\right|_{\xi=\infty} = 0, \quad \theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0. \qquad (4)$$

Интегрируя систему (4) численным методом [2], получили результаты, приведенные в таблице 1.

Таблица 1 – Решения уравнения (4)

| $\xi_*$ | $\xi$ | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| -3 | 59,9 | 76,5 | 82,3 | 84,8 | 86,1 | 86,9 | 87,5 | 87,8 | 88.1 | 88,4 | 88,6 | 88,7 |
| -2,5 | | 16,6 | 22,4 | 24,9 | 26,2 | 27,0 | 27,5 | 27,9 | 28,2 | 28,4 | 28,6 | 28,8 |
| -2 | | | 5,8 | 8,3 | 9,6 | 10,4 | 10,9 | 11,3 | 11,6 | 11,8 | 12,0 | 12,2 |
| -1,5 | | | | 2,5 | 3,8 | 4,6 | 5,1 | 5,5 | 5,8 | 6,0 | 6,2 | 6,4 |
| -1 | | | | | 1,3 | 2,1 | 2,6 | 3,0 | 3,3 | 3,5 | 3,7 | 3,9 |
| -0,5 | | | | | | 0,7 | 1,3 | 1,7 | 2,0 | 2,2 | 2,4 | 2,6 |
| 0 | | | | | | | 0,5 | 0,9 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 |

Пусть теперь в начальный момент времени $t=0$ сток равен $Q$, а $Q_*$ – также некоторое фиксированное значение стока, но уже большее исходного. Для определения периода времени, в течение которого значение стока будет находиться в пределах $(\infty, Q_*]$, используется система (4) с измененными начальными условиями, т. е.

$$G(Q,t)|_{Q=Q_*} = 0, \quad \left.\frac{\partial G(Q,t)}{\partial Q}\right|_{Q=-\infty} = 0.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \left.\frac{d\theta_1}{d\xi}\right|_{\xi=-\infty} = 0, \quad \theta_1(\xi)|_{\xi=\xi_*} = 0. \qquad (5)$$

Решение системы (5) дает те же результаты, что приведены в таблице 1, только значения $\xi$ и $\xi_*$ берутся с противоположными знаками.

Изложенная выше методика была использована для определения времени изменения значений годового стока р. Висла – г. Варшава. В таблице 2 приведены значения основных статистических параметров временного ряда годовых расходов воды р. Висла – г. Варшава [3].

Таблица 2 – Основные статистические параметры временного ряда годовых расходов воды р. Висла – г. Варшава

| SQ, м$^3$/с | σ, м$^3$/с | $C_v$ | r(1) |
|---|---|---|---|
| 573 | 117 | 0,21 | 0,127 |

Коэффициент $k$ определяется по формуле $k = -\ln r = -\ln 0{,}127 = 2{,}06$.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ сток равен $Q = 750$ м³/с, а фиксированное значение стока $Q_* = 450$ м³/с. Тогда $\xi$ определяется как отклонение начального значения стока от среднегодового в долях $C_v$, т. е.

$$\xi = \frac{Q - SQ}{SQ \cdot C_v} = 1{,}5.$$

Аналогично определяется $\xi_*$:

$$\xi_* = \frac{Q_* - SQ}{SQ \cdot C_v} = -1.$$

По значениям $\xi$ и $\xi_*$ из таблицы 1 находим значение $\theta_1 = 3{,}3$. Тогда период времени, в течение которого значение стока будет находиться в пределах $[Q_*, \infty)$, определяется как частное $\theta_1$ и $k$:

$$T_1 = \frac{\theta_1}{k} = 1{,}6.$$

Значения размерного времени в зависимости от значений $Q$ и $Q_*$ представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Значения времени изменения годового стока р. Висла – г. Варшава, лет

| Фиксированное значение стока, м³/с | Сток в начальный момент времени, м³/с | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 350 | 400 | 450 | 500 | 550 | 600 | 650 | 700 | 750 | 800 | 850 |
| 350 | 0 | 1,9 | 2,9 | 3,4 | 3,8 | 4,1 | 4,2 | 4,4 | 4,5 | 4,6 | 4,7 |
| 400 | 0,1 | 0 | 1,0 | 1,5 | 1,9 | 2,1 | 2,3 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 |
| 450 | 0,2 | 0,1 | 0 | 0,6 | 0,9 | 1,2 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 |
| 500 | 0,4 | 0,3 | 0,1 | 0 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 0,9 | 1,1 | 1,2 | 1,2 |
| 550 | 0,6 | 0,5 | 0,3 | 0,2 | 0 | 0,3 | 0,4 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 |
| 600 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 0 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 |
| 650 | 1,2 | 1,1 | 1,0 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0 | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,4 |
| 700 | 1,8 | 1,7 | 1,6 | 1,4 | 1,2 | 1,0 | 0,6 | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |
| 750 | 2,8 | 2,7 | 2,6 | 2,4 | 2,2 | 2,0 | 1,6 | 1,0 | 0 | 0,1 | 0,2 |
| 800 | 4,8 | 4,7 | 4,6 | 4,4 | 4,3 | 4,0 | 3,6 | 3,0 | 2,0 | 0 | 0,1 |
| 850 | 9,4 | 9,3 | 9,2 | 9,1 | 8,9 | 8,6 | 8,2 | 7,6 | 6,6 | 4,6 | 0 |

Таблица 3 дает некий количественный ориентир времени изменения значений стока. Для моделирования искусственных гидрологических рядов практически неограниченной длительности разработан метод [4], основанный на решении системы уравнений (4) – (5) с применением простой цепи Маркова [5].

Моделирование искусственных гидрологических рядов для створа р. Висла – г. Варшава практически неограниченной длительности (более 1000 лет) производится с использованием результатов таблицы 3, а также с применением простой цепи Маркова. Моделирование рядов годового стока указанным методом дает приемлемые результаты. Смоделированные ряды годовых расходов воды с применением простой цепи Маркова и нелинейным методом для р. Висла – г. Варшава обладают статистическими параметрами, отличными от параметров исходного ряда в пределах ±5–10%.

При этом, как показали исследования, моделирование искусственного гидрологического ряда простой цепью Маркова дает хорошие результаты только для автокорреляционной функции со сдвигом на один год, т. к. этот параметр заложен при моделировании. Нелинейная модель позволяет прогнозировать ряд, обладающий схожей с исходным рядом корреляционной функцией, со сдвигом на 4 и более года.

Таким образом, предложено применение стохастических дифференциальных уравнений для описания и прогнозирования многолетних колебаний годового стока. Решена задача стохастической гидрологии прогнозирования значения речного стока для р. Висла – г. Варшава. Кроме этого, предложен метод моделирования искусственных гидрологических рядов, дающий лучшие результаты прогнозирования «дальней» корреляционной связи, нежели метод моделирования с использованием простой цепи Маркова. Результаты исследований можно применить при расчете и прогнозе многолетних колебаний речного стока неизученных и слабо изученных трансграничных рек.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – 2002. – Т. 29, № 1. – С. 62–67.

2. Прокопеня, А.Н. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / А.Н. Прокопеня, А.В. Чичурин. – Минск : БГУ, 1999. – 265 с.

3. Fal, Barbara. Przepływy charakterystyczne głównych rzek polskich w latach 1951–1990 / Barbara Fal oraz Ewa Bogdanowicz [i inne]. – Warszawa : IMiGW, 1997.

4. Стохастическое моделирование различных видов стока основных рек Беларуси с помощью нелинейных моделей / В.Ф Логинов [и др.] // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 6. – С. 96–100.

5. Сванидзе, Г.Г. Математическое моделирование гидрологических рядов / Г.Г. Сванидзе. – Л. : Гидрометеоиздат, 1977. – 296 с.