ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

Копайцева Т. В. (БрГУ, математический ф-т).
Руководитель: к.ф.-м.н. Тузик С. А.

В различных вопросах анализа термин “функция” приходится понимать с разной степенью общности, т.е. иногда приходится предполагать, что функции непрерывны, дифференцируемы один или несколько раз. Подобное затруднение можно преодолеть путём не сужения, а существенного расширения понятия функции, вводя так называемые обобщённые функции.

Определение. Обобщённой функцией будем называть любой линейный непрерывный функционал на пространстве K (совокупность основных функций), т.е. функционал f, удовлетворяющий условиям:

1) $(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$ для любых основных функций φ_1 и φ_2 и любых вещественных чисел α_1 и α_2.

2) если $\varphi_n \to 0$ в K, то $(f, \varphi_n) \to 0$.

В пространство обобщённых функций вкладывается пространство обычных функций.

Рассмотрим простейшее неоднородное уравнение $\qquad g' = f, \qquad (1)$

где f – данная обобщённая функция, а g – искомая. Общее решение уравнения (1) получается прибавлением к найденному частному решению общего решения однородного уравнения.

$$g = g_0 + C, \qquad \text{где} \qquad (g_0, \varphi) = (g, \varphi_0) = \left(f, -\int_{-\infty}^{x} \varphi_0(\xi)d\xi \right).$$

Найдём общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} y_0' - a_{00}(x)y_0 - \ldots - a_{0,p-1}(x)y_{p-1} = f_0, \\ \ldots \\ y_{p-1}' - a_{p-1,0}(x)y_0 - \ldots - a_{p-1,p-1}(x)y_{p-1} = f_{p-1}. \end{cases}$$

где f_i – обобщённые, а $a_{jk}(x)$ – обычные бесконечно дифференцируемые функции. Она сводится к уравнению (1) подстановкой $y = \mathrm{U}z$, где U –матрица фундаментальных решений соответствующей однородной системы ($f_i = 0$). Получаем $\mathrm{U}z' = f$ или $z' = \mathrm{U}^{-1}f$.

Во всех случаях, если правые части – обычные функции, все решения в пространстве K′ (совокупность всех обобщённых функций) также оказываются обычными функциями.

Литература. 1. А.И.Колмогоров, С.В.Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. 2. Г.Е.Шилов Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: МГУ, 1984.