

М. В. НИКОЛАЕВ, Т. Г. ХОМИЦКАЯ, Л. В. ЛИЗУН
Брест, БрГТУ

**РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
О НАЗНАЧЕНИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ
РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ**

Задача о назначениях – классическая задача дискретной оптимизации, являющаяся частным случаем транспортной задачи. Алгоритм [1], позволяющий сформировать все возможные решения задачи, дополнен описанием вычисления оптимального шага перерасчета. Также разработана обучающая программа с функцией контроля, которая автоматизирует решение рассматриваемой задачи.

Постановка задачи о назначениях. Имеется n различных работ A_1, A_2, \dots, A_n и n станков B_1, B_2, \dots, B_n , каждый из которых может выполнить любую работу, но с различными затратами на производство. Затраты на выполнение j -й работы на i -м станке определяются мерой затрат c_{ij} , где $i, j = 1, 2, \dots, n$. Найти оптимальное распределение работ для выполнения на станках, т. е. такую расстановку, при которой общие затраты при назначении окажутся наименьшими.

Алгоритм решения и демонстрация работы программы основаны на использовании теоремы Ф. Холла о существовании системы различных представителей: система $M(S) = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ имеет систему различных представителей тогда и только тогда, когда для любой подсистемы $\{S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}\} \subseteq M(S)$ выполняется неравенство: $|\bigcup_{v=1}^k S_{i_v}| \geq k$ [1].

Алгоритм состоит в подборе чисел u_i и v_j и опирается на следующее утверждение:

$$\min_p \sum_{i=1}^n c_{\pi(i)} = \min_{u_i, v_j, \geq 0} \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j,$$

где $\pi(i)$ – обозначение для всех перестановок по индексу i , c_{ij} – элемент квадратной матрицы целых чисел C , u_i и v_j – числа, подобранные по правилам, описанным ниже, n – размерность квадратной матрицы C .

Минимум суммы величин u_i и v_j , где $i, j = 1, 2, \dots, n$, достигается на перестановке π такой, что, $u_i + v_{\pi(i)} + c_{\pi(i)} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Начинаем решение задачи с поиска чисел u_i , v_j по следующему правилу: u_i выбирается как минимальный элемент по строке i , v_j заполняется нулями для всех j .

Затем заполняется матрица совпадений по следующему правилу: ставим знак * в те позиции, где для элементов матрицы затрат и найденных u_i и v_j выполняется равенство $u_i + v_j + c_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

По матрице совпадений для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ строятся множества совпадений S_i , в которое добавляется номер столбца j , если элемент матрицы совпадений в i -й строке и j -м столбце отмечен знаком *.

После исследуется возможность составления системы различных представителей для множеств совпадений с помощью проверки условий теоремы Холла, которая начинается с самого наибольшего числа объединяемых множеств. Если ни на одном из объединений условия не нарушаются, то система различных представителей найдена (она определяется по матрице совпадений) и работа алгоритма заканчивается.

Пусть условие теоремы Холла нарушается: $|S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}| \neq \{j_1, \dots, j_m\} < k$. Тогда необходимо перейти к новой итерации (с момента построения матрицы совпадений), предварительно уменьшив числа u_i и увеличив числа v_j на одну и ту же величину (шаг) r : если множество S_i участвовало в объединении, уменьшаем число u_i ; если элемент j входит в объединение, то увеличиваем число v_j . Шаг перерасчета вычисляется по правилу:

$$r = \min\{u_i + v_j - c_{ij}\}, i \in \{i_1, \dots, i_k\}, j \in \{j_1, \dots, j_m\}.$$

После завершения алгоритма по матрице совпадений определяются все возможные назначения, а их суммарные затраты есть $\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j$.

Процесс реализации приложения. Приложение написано при помощи Qt – кросс-платформенного фреймворка для проектирования программного обеспечения на языке программирования C++. Разработка приложения проходила в рамках совмещения процедурного и объектно ориентированного подхода. Приложение имеет три режима работы: *обычный режим работы* предназначен для быстрого и эффективного решения задачи; *режим обучения* пользователя предназначен для пошагового выполнения алгоритма с последовательным появлением таблиц, демонстрирующих ход решения задачи; *режим «контроля»* предназначен для проверки знаний пользователя, включая в себя как теоретические вопросы по алгоритму, так и его практическое выполнение.

Практическое применение. Приложение используется при изучении дисциплин «Системный анализ и исследование операций», «Дискретная математика и математическое моделирование». Кроме того, описан подход к реализации математической модели алгоритма с использованием встроенной надстройки «Поиск решения» в Excel.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов, Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы / Б. Н. Иванов. – М. : Лаб. базовых знаний, 2001. – 288 с.