

**М. В. НИКОЛАЕВ, Т. Г. ХОМИЦКАЯ, Л. В. ЛИЗУН**  
Брест, БрГТУ

### **РАЗРАБОТКА ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ**

Задача о назначениях – классическая задача дискретной оптимизации, являющаяся частным случаем транспортной задачи. Алгоритм [1], позволяющий сформировать все возможные решения задачи, дополнен описанием вычисления оптимального шага перерасчета. Также разработана обучающая программа с функцией контроля, которая автоматизирует решение рассматриваемой задачи.

*Постановка задачи о назначениях.* Имеется  $n$  различных работ  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и  $n$  станков  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , каждый из которых может выполнить любую работу, но с различными затратами на производство. Затраты на выполнение  $j$ -й работы на  $i$ -м станке определяются мерой затрат  $c_{ij}$ , где  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Найти оптимальное распределение работ для выполнения на станках, т. е. такую расстановку, при которой общие затраты при назначении окажутся наименьшими.

Алгоритм решения и демонстрация работы программы основаны на использовании теоремы Ф. Холла о существовании системы различных представителей: система  $M(S) = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  имеет систему различных представителей тогда и только тогда, когда для любой подсистемы  $\{S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_k}\} \subseteq M(S)$  выполняется неравенство:  $|\bigcup_{v=1}^k S_{i_v}| \geq k$  [1].

Алгоритм состоит в подборе чисел  $u_i$  и  $v_j$  и опирается на следующее утверждение:

$$\min_p \sum_{i=1}^n c_{\pi(i)} = \min_{u_i, v_j, \geq 0} \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j,$$

где  $\pi(i)$  – обозначение для всех перестановок по индексу  $i$ ,  $c_{ij}$  – элемент квадратной матрицы целых чисел  $C$ ,  $u_i$  и  $v_j$  – числа, подобранные по правилам, описанным ниже,  $n$  – размерность квадратной матрицы  $C$ .

Минимум суммы величин  $u_i$  и  $v_j$ , где  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , достигается на перестановке  $\pi$  такой, что,  $u_i + v_{\pi(i)} + c_{\pi(i)} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Начинаем решение задачи с поиска чисел  $u_i$ ,  $v_j$  по следующему правилу:  $u_i$  выбирается как минимальный элемент по строке  $i$ ,  $v_j$  заполняется нулями для всех  $j$ .

Затем заполняется матрица совпадений по следующему правилу: ставим знак \* в те позиции, где для элементов матрицы затрат и найденных  $u_i$  и  $v_j$  выполняется равенство  $u_i + v_j + c_{ij} = 0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

По матрице совпадений для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  строятся множества совпадений  $S_i$ , в которое добавляется номер столбца  $j$ , если элемент матрицы совпадений в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце отмечен знаком \*.

После исследуется возможность составления системы различных представителей для множеств совпадений с помощью проверки условий теоремы Холла, которая начинается с самого наибольшего числа объединяемых множеств. Если ни на одном из объединений условия не нарушаются, то система различных представителей найдена (она определяется по матрице совпадений) и работа алгоритма заканчивается.

Пусть условие теоремы Холла нарушается:  $|S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k}| \neq \{j_1, \dots, j_m\} < k$ . Тогда необходимо перейти к новой итерации (с момента построения матрицы совпадений), предварительно уменьшив числа  $u_i$  и увеличив числа  $v_j$  на одну и ту же величину (шаг)  $r$ : если множество  $S_i$  участвовало в объединении, уменьшаем число  $u_i$ ; если элемент  $j$  входит в объединение, то увеличиваем число  $v_j$ . Шаг перерасчета вычисляется по правилу:

$$r = \min\{u_i + v_j - c_{ij}\}, i \in \{i_1, \dots, i_k\}, j \in \{j_1, \dots, j_m\}.$$

После завершения алгоритма по матрице совпадений определяются все возможные назначения, а их суммарные затраты есть  $\sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j$ .

*Процесс реализации приложения.* Приложение написано при помощи Qt – кросс-платформенного фреймворка для проектирования программного обеспечения на языке программирования C++. Разработка приложения проходила в рамках совмещения процедурного и объектно ориентированного подхода. Приложение имеет три режима работы: *обычный режим работы* предназначен для быстрого и эффективного решения задачи; *режим обучения* пользователя предназначен для пошагового выполнения алгоритма с последовательным появлением таблиц, демонстрирующих ход решения задачи; *режим «контроля»* предназначен для проверки знаний пользователя, включая в себя как теоретические вопросы по алгоритму, так и его практическое выполнение.

*Практическое применение.* Приложение используется при изучении дисциплин «Системный анализ и исследование операций», «Дискретная математика и математическое моделирование». Кроме того, описан подход к реализации математической модели алгоритма с использованием встроенной надстройки «Поиск решения» в Excel.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов, Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы / Б. Н. Иванов. – М. : Лаб. базовых знаний, 2001. – 288 с.