А. А. Крощенко
Научный руководитель — *В. М. Мадорский*
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина,
г. Брест, Республика Беларусь

О ЦЕЛЕСООБРАЗНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ ГАУССА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Имеются задачи, для которых вопрос об устойчивости или неустойчивости применяемых численных методов стоит наиболее остро и требует большой дифференциации. Речь идет о начальных задачах для дифференциальных уравнений, называемых жесткими.

Установлено, что для того, чтобы попытаться решить такие задачи необходимы методы, обладающие определенным типом устойчивости (как минимум А-устойчивостью). По нашему мнению, ряд неявных методов Рунге-Кутты обладают этим свойством. В нашем исследовании мы определяем целесообразность использования методов Гаусса высоких порядков для решения жестких начальных задач:

$$y' = f(x, y),\ x_0 = a \le x \le b,\ y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

где $f : G \subset R^{n+1} \to R^n$ — вещественная функция, как правило, нелинейная, а G — замкнутая и ограниченная область, причем $(x_0, y_0) \in G$, $y = (y_1, ..., y_n)^T$, $f = (f_1(x, y), ..., f_n(x, y))^T$, $y_0 = (y_{01}, ..., y_{0n})^T$.

Будем считать, что функция f непрерывно дифференцируема в G. Отсюда следует, что задача (1) имеет решение на $[a, b]$.

В качестве тестовой задачи была рассмотрена задача Ван-дер-Поля вида:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -a(y_2(y_1^2 - 1) + y_1); \end{cases} \qquad a \sim 10^6, \begin{cases} y_1(0) = 2, \\ y_2(0) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

Здесь следует отметить, что задача (2) относится к классу т.н. сингулярно-возмущенных задач (содержащих малый параметр при производной, входящий в жесткую часть спектра).

Для решения задачи (2) использовались методы Рунге-Кутты вида:

$$k_1 = f(t_n + c_1\tau, y_n + \tau\sum_{l=1}^{s} b_{1l}k_l),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$k_s = f(t_n + c_s\tau, y_n + \tau\sum_{l=1}^{s} b_{sl}k_l), \tag{3}$$

$$y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{l=1}^{s} a_l k_l,$$

где коэффициенты $a_i, c_i, b_{ij}, i = \overline{1,s}, j = \overline{1,s}$ определяются из таблиц Бутчера для выбранного s-стадийного метода, либо исходя из упрощающих предположений вида:

$$\begin{aligned} B(p)&: \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q}, \ q = 1, \ldots, p; \\ C(\eta)&: \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{q-1} = \frac{c_i^q}{q}, \ i = 1, \ldots, s, \ q = 1, \ldots, \eta, \end{aligned} \tag{4}$$

где $p \leq 2\eta + 2$, а p определяет порядок метода ($p = 2s$).

Основные трудности численного решения исследуемых жестких задач, связаны с выбором шага интегрирования. Дело в том, что характерные времена исследуемых процессов могут различаться более чем в 10^{12} раз.

Были рассмотрены три алгоритма выбора шага интегрирования:

1. $\tau_{new} = \beta\tau \left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p+1}},$

где β — так называемый гарантийный множитель, $T = C_2 \tau_{new}^{p+1}$ (C_2 — некоторая константа), $\varepsilon = \frac{u_n - u_{2n}}{2^{p-1} - 1}$ ($u_n = u(x_n) \sim y(x_n)$), p – порядок метода.

2. $\tau_{new} = \tau \min\left\{\beta_{\max}, \max\left(\beta_{\min}, \beta\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p+1}}\right)\right\},$

где $\beta_{\max}$, $\beta_{\min}$ — максимальное и минимальное разрешенное изменение шага интегрирования.

3. Более тонкий алгоритм управления величиной шага получается с учетом величины ошибки на предыдущем шаге

$$\tau_{new} = \tau \left(\frac{T}{\varepsilon_n}\right)^{\alpha} \left(\frac{T}{\varepsilon_{n-1}}\right)^{-\beta},$$

т. е. фактически гарантийный множитель зависит от ошибки на предыдущем шаге. В качестве $\alpha = \frac{1}{p+1}$, $\beta \approx 0,08$.

Численный эксперимент позволяет говорить об эффективности использования второго и третьего алгоритмов выбора шага интегрирования, причем третий алгоритм оказывается более эффективным при применении к методам Гаусса невысокого порядка (до шестого).