**О.В. МАТЫСИК[1], С.И. ПАРФОМУК[2], Д.Н. ЧЕРНЯКЕВИЧ[1]**

[1]Физико-математический факультет БрГУ имени А.С. Пушкина, кафедра прикладной математики и технологий программирования

[2]Факультет электронно-информационных систем БрГТУ, кафедра информатики и прикладной математики

## СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В действительном гильбертовом пространстве *H* решается линейное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

где $A$ – ограниченный, положительный, самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением. Причём $0 \in SpA$, т. е. задача неустойчива, и, значит, некорректна.

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + \alpha Ay, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Предположим, что при точной правой части $y$ существует единственное решение $x$ уравнения (1). Для отыскания решения уравнения (1) применим итерационный метод явного типа

Рассмотрим сходимость метода (2) при точной правой части $y$ операторного уравнения (1). Нетрудно показать по индукции, что $x_n = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A^2)^n\right]y$. Тогда $x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A^2)^n y$

Используя [1] интегральное представление самосопряжённого оператора $A = \int_0^M \lambda\, dE_\lambda$ ($M = \|A\|$, $E_\lambda$ – соответствующая оператору $A$ спектральная функция), получим $x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda^2)^n dE_\lambda y$.

Для сходимости метода (2) потребуем, чтобы $\left|1 - \alpha\lambda^2\right| < 1,\ \ \lambda \in (0, M]$. Отсюда

$$0 < \alpha < \frac{2}{M^2}. \tag{3}$$

Разобьём выписанный интеграл на два интеграла

$$x - x_n = \int_0^\varepsilon \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda^2)^n dE_\lambda y + \int_\varepsilon^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda^2)^n dE_\lambda y.$$

При условии (3) $\left|1 - \alpha\lambda^2\right| \le q < 1$ для $\lambda \in [\varepsilon, M]$, поэтому

$$\left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda^2)^n dE_\lambda y\right\| \le q^n \left\|\int_\varepsilon^M \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = q^n \left\|\int_\varepsilon^M dE_\lambda x\right\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Для первого интеграла

$$\left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1}(1 - \alpha\lambda^2)^n dE_\lambda y\right\| \le \left\|\int_0^\varepsilon \lambda^{-1} dE_\lambda y\right\| = \left\|\int_0^\varepsilon dE_\lambda x\right\| = \|E_\varepsilon x\| \to 0,$$

так как $E_\varepsilon$ сильно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ [1, с. 302].

Таким образом, $\|x - x_n\| \to 0, n \to \infty$ и, значит, сходимость метода (2) к точному решению $x$ для случая $x_0 = 0$ при условии (3) доказана, т.е. доказана

<u>Теорема.</u> *При условии (3) явный итерационный процесс (2) сходится в исходной норме гильбертова пространства.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.