Л.П. МАХНИСТ[1], О.В. МАТЫСИК[2], Т.И.КАРИМОВА[1], А.П. ЛИПОВЦЕВ[1]
[1]Факультет электронно-информационных систем БрГТУ, кафедра высшей математики
[2]Физико-математический факультет БрГУ имени А.С. Пушкина, кафедра прикладной математики и технологий программирования

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА И НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В работе рассматриваются числовые последовательности $x_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!}$ и $y_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}$, связанные с медианой закона Пуассона − распределения вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения k = 0, 1, 2, ... с вероятностями $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, где $\lambda > 0$ − параметр.

Функция распределения закона Пуассона:

$$F(x) = P(X < x) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\lceil x\rceil-1}\frac{\lambda^k}{k!},$$

если $x > 0$, где $\lceil x\rceil$ − наименьшее целое, большее или равное x: $\lceil x\rceil = \min\{n \in Z \mid n \geq x\}$.

Рассмотрим функцию

$$F(m+1,\lambda) = 1 - \frac{\gamma(m+1,\lambda)}{m!} = 1 - \frac{1}{m!}\int_0^\lambda t^m e^{-t}dt,$$

где $\gamma(m,\lambda) = \int_0^\lambda t^{m-1}e^{-t}dt$ − неполная нижняя гамма-функция (например, в [1]).

Заметим, что

$$F(1,\lambda) = 1 - \frac{1}{0!}\int_0^\lambda t^0 e^{-t}dt = 1 - \int_0^\lambda e^{-t}dt = 1 + e^{-t}\Big|_0^\lambda = e^{-\lambda} = p_0.$$

Используя метод интегрирования по частям в определенном интеграле, получим

$$F(m+1,\lambda) = 1 - \frac{1}{m!}\int_0^\lambda t^m e^{-t}dt = \sum_{k=1}^{m}p_k + F(1,\lambda) = \sum_{k=0}^{m}p_k.$$

Следовательно, функцию распределения *F(x)* можно определить следующим образом:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k=0}^{\lceil x\rceil-1}p_k = F(\lceil x\rceil,\lambda) = 1 - \frac{1}{(\lceil x\rceil-1)!}\int_0^\lambda t^{\lceil x\rceil-1}e^{-t}dt,$$

если x.

Используя соотношения $x_m - x_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!}\left(m^{m-1}e^{-m} - \int_{m-1}^{m}t^{m-1}e^{-t}dt\right)$, доказано, что последовательность x_m является убывающей, и то, что последовательность y_m является возрастающей, учитывая соотношение $y_m - y_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!}\left((m-1)^{m-1}e^{-m+1} - \int_{m-1}^{m}t^{m-1}e^{-t}dt\right)$.

Можно доказать, что последовательности $x_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!}$ и $y_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}$ являются ограниченными. Используя формулу Стирлинга (например, в [2]), легко показать, что $\lim_{m\to\infty} x_m - \lim_{m\to\infty} y_m = \lim_{m\to\infty} e^{-m}\frac{m^m}{m!} \le \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi m}} = 0$ и, следовательно, для последовательностей x_m и y_m выполняется $\lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{m\to\infty} y_m$.

Заметим, что согласно центральной предельной теореме, при больших m гамма-распределение (распределение с плотностью вероятности $f(x) = \frac{x^{m-1}e^{-x}}{(m-1)!}$, $x \ge 0$) может быть приближено нормальным распределением $\mathrm{N}(a;\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$ с математическим ожиданием a и дисперсией σ для которых $a = \sigma^2 = m$.

Следовательно, $\frac{x^{m-1}e^{-x}}{(m-1)!} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2m}}$ и выполняется $y_m = 1 - \frac{1}{(m-1)!}\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt \approx \int_0^m \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}e^{-\frac{(t-m)^2}{2m}}dt = 1 - \Phi\left(\sqrt{m}\right)$ при больших m, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$ – интеграл вероятностей (например, в [2]).

Тогда выполняется равенство $\lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{m\to\infty} y_m = 0{,}5$ и выполняются неравенства $0{,}5 < x_m \le x_1 = 2e^{-1}$ и $e^{-1} = y_1 \le y_m < 0{,}5$.

Лемма. Для любого целого неотрицательного числа m существует единственное решение уравнения $F(m+1,\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} = 0{,}5$ относительно λ, принадлежащее интервалу $(m, m+1)$.

Доказательство. Функция $F(m+1,\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}$ для любого целого неотрицательного числа m является убывающей, так как $F'_\lambda(m+1,\lambda) = \left(1 - \frac{1}{m!}\int_0^\lambda y^m e^{-y}dy\right)'_\lambda = -\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} < 0$.

Так как $F(m+1, m+1) = y_{m+1} < 0{,}5$ и $F(m+1, m) = x_m > 0{,}5$, то для любых целого неотрицательного числа m существует единственное $\lambda_m \in (m, m+1)$ такое, что $F(m+1, \lambda_m) = e^{-\lambda_m} \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_m^k}{k!} = 0{,}5$.

Лемма доказана.

На рисунке 1 изображены числовые последовательности x_m и y_m ($m = \overline{1, 50}$).

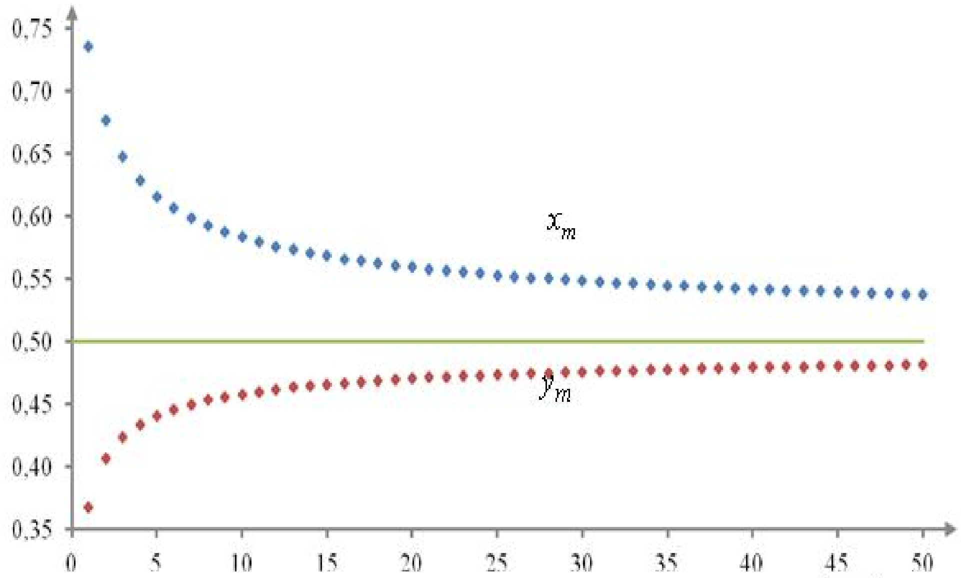

Рисунок 1 – Числовые последовательности x_m и y_m ($m = \overline{1, 50}$)

Используя приведенные выше неравенства для последовательностей x_m, y_m и взаимосвязь функции распределения закона Пуассона с рассматриваемыми последовательностями получены следующие выводы.

Если параметр λ распределения Пуассона является натуральным числом, то медиана такого распределения равна этому параметру. Если параметр λ распределения Пуассона не является натуральным числом, то медиана такого распределения равна или целой части параметра распределения [λ] , если $\lambda \le \lambda_m$, или [λ]=[λ] + 1 , если если $\lambda > \lambda_m$, или принадлежит отрезку [[λ],[λ] + 1] , если параметр λ распределения равен $\lambda_m \in (m, m+1)$, где [λ] = m.

Легко проверить, например, следующее: медиана распределения Пуассона равна 0, если параметр распределения λ удовлетворяет неравенству $\lambda < \ln 2$, равна 1, если параметр распределения λ удовлетворяет неравенству $\ln 2 < \lambda \le 1$, и принадлежит интервалу [0,1] , если параметр распределения равен ln 2.

Таким образом, можно сделать следующий вывод, что медиана распределения Пуассона может быть равна целой части параметра λ распределения [λ] или [λ]=[λ] +1 , если функция распределения *F(x)* и медиана закона распределения определятся как, например, в [3].

Можно предположить, что исследование последовательностей вида $x_m(p) = e^{-m} \sum_{k=0}^{m} \frac{(m+p)^k}{k!}$ и $y_m(p) = e^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m+p)^k}{k!}$ (0 < p < 1) даст возможность получить простые формулы для медианы закона Пуассона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Янке, Е. Специальные функции: формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш – М. : Наука, 1968. – 344 с.
2. Худяков, А.П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А.П. Худяков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 13–21.
3. Корн, Г. А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. А. Корн, Т. М. Корн – М. : Наука, 1984. – 832 с.
4. Математическая энциклопедия : в 5 т. / Советская энциклопедия ; гл. ред. И. М. Виноградов. – М., 1977–1985.