О.В. МАТЫСИК[1], Л.П. МАХНИСТ[2], Т.И.КАРИМОВА[2], А.И. МЯЛИК[1]

[1]Физико-математический факультет БрГУ имени А.С. Пушкина, кафедра прикладной математики и технологий программирования
[2]Факультет электронно-информационных систем БрГТУ, кафедра высшей математики

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ЯВНОМ МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В действительном гильбертовом пространстве H исследуется некорректное уравнение первого рода

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $\|y - y_\delta\| \le \delta$, A – положительный ограниченный и самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора А, и, следовательно, задача некорректна.

Пусть при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x. Для отыскания этого решения применяются приближения

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^2\right] y_\delta, \; x_{0,\delta} = 0. \tag{2}$$

Ниже, как обычно, под сходимостью итераций (2) понимается утверждение о том, что приближения (2) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения (1) при достаточно малых δ и $n\delta$ и достаточно больших n.

Справедливы

Теорема 1. *Итерационный процесс (2) сходится при условии* $0 < \alpha < \dfrac{2}{\|A\|}$, *если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы* $n\delta \to 0, \;\; n \to \infty, \;\; \delta \to 0$.

Теорема 2. *Теорема 2. Если* $x = A^s z$, $s > 0$, *и* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$, *то для явного итерационного метода (2) справедлива оценка погрешности* $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s (2n\alpha e)^{-s} \|z\| + 2n\alpha\delta$.

Оптимальная по n оценка погрешности для метода итераций (2) имеет вид $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s) e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}$. и получается при $n_{\text{опт}} = s(2\alpha)^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{1}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}$.

Замечание. *Оптимальная оценка погрешности метода (2) не зави-сит от параметра α, но от него зависит априорный момент останова итераций* $n_{опт}$. *Поэтому для уменьшения* $n_{опт}$ *и, значит, объёма вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$ *и так, чтобы* $n_{опт} \in Z$.

Рассмотрим погрешность метода итераций (2) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (2), а $Z_{n;}$ – значение, полученное по той же формуле с учётом вычислительных погрешностей γ_n, т. е.

$$z_{n+1} = (E-\alpha A)^2 z_n + A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^2\right]y_\delta + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0. \qquad (3)$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (3) равенство (2), получим

$$\varepsilon_{n+1} = (E-\alpha A)^2 \varepsilon_n + \alpha\gamma_n \ . \qquad (4)$$

Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции покажем, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E-\alpha A)^{2(n-1-i)} \alpha\gamma_i \ . \qquad (5)$$

При $n = 0$ из (4) получаем $\varepsilon_1 = \alpha\gamma_0$, а из (5) при $n = 1$: $\varepsilon_1 = \alpha\gamma_0$. Следовательно, при $n = 1$ формула (5) верна. Предположим, что (5) верно при $n = p$:

$$\varepsilon_p = (E-\alpha A)^{2(p-1)}\alpha\gamma_0 + (E-\alpha A)^{2(p-2)}\alpha\gamma_1 + \ldots + (E-\alpha A)^2\alpha\gamma_{p-2} + \alpha\gamma_{p-1}.$$

Покажем, что данная формула верна при $n = p + 1$. Из (4) получаем:

$$\varepsilon_{p+1} = (E-\alpha A)^2\varepsilon_p + \alpha\gamma_p = (E-\alpha A)^2\Big[(E-\alpha A)^{2(p-1)}\alpha\gamma_0 + (E-\alpha A)^{2(p-2)}\alpha\gamma_1 +$$

$$+ \ldots + (E-\alpha A)\alpha\gamma_{p-2} + \alpha\gamma_{p-1}\Big] + \alpha\gamma_p = (E-\alpha A)^{2p}\alpha\gamma_0 + (E-\alpha A)^{2(p-1)}\alpha\gamma_1 +$$

$$+ \ldots + (E-\alpha A)^4\alpha\gamma_{p-2} + (E-\alpha A)^2\alpha\gamma_{p-1} + \alpha\gamma_p = \sum_{i=0}^{p}(E-\alpha A)^{2(p-i)}\alpha\gamma_i .$$

Следовательно, формула (5) верна $\forall n \in N$.

В силу $0 < \alpha < \dfrac{2}{\|A\|}$ и принадлежности нуля спектру оператора A: $\|E-\alpha A\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup\limits_p |\gamma_p|$.

Таким образом, оценка погрешности метода итераций (2) при счёте с округлениями имеет вид

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le s^s(2n\alpha e)^{-s}\|z\| + 2n\alpha\delta + n\alpha\gamma .$$