4. Bergmann, M. J. Optical-field calculations for lossy multiple-layer AlxGa1-xN/InxGa1-xN laser diodes / M. J. Bergmann, Jr. H. C. Casey // J. Appl. Phys. – 1998. – Vol. 84, Iss. 3. – P. 1196–1203.

5. Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – Москва : Наука, 1978. – 512 с.

6. Адамс, М. Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. – Москва : Мир, 1984. – 512 с.

7. Тарасюк, Н. П. Фактор оптического ограничения и пороговые условия генерации оптически накачиваемых полупроводниковых лазеров на квантоворазмерных структурах InGaN/GaN, выращенных на кремниевых подложках / Н. П. Тарасюк, А. А. Гладыщук, Е. В. Луценко // Вестник БГТУ. Физика, математика, химия. – 2002. – № 5. – С. 8–13.

8. Casey, H. C. Heterostructure Lasers. Part A. / H. C. Casey, M. B. Panish // Quantum Electronics Principles and Applications. N. Y., – 1978.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Р. Федорец, Н. В. Вабищевич
Учреждение образование «Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой», г. Новополоцк, Витебская область, Республика Беларусь

Актуальной проблемой современной термодинамики является задача поиска оптимальных методов анализа процессов теплообмена, широко распространенных в природе и технике. Как правило, параметры, характеризующие указанные процессы, находятся в сложной взаимозависимости и являются функциями многих переменных. Подобные проблемы описания физических процессов решаются применением методик численного либо компьютерного моделирования. Выбор оптимальной методики позволяет получать результаты с достаточной достоверностью и точностью. Цель настоящей работы состояла в анализе возможности применения метода разделения переменных для решения двумерных термодинамических задач теплопроводности.

Известно [1–3], что путем решения дифференциального уравнения теплопроводности, которое устанавливает связь между пространственным и временным изменением температуры, в общем случае, может быть определено температурное поле внутри тела:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right),\ a = \frac{\kappa}{\rho c},$$

где a – физический параметр вещества, характеризующую скорость изменения температуры в нестационарных процессах, который был назван коэффициентом температуропроводности; κ – коэффициент теплопроводности; ρ – плотность; c – удельная теплоемкость [1].

Начальное условие для уравнения теплопроводности имеет вид:

$$T(x, y, z, 0) \equiv T\Big|_{t=0} = f(x, y, z),$$

где $f(x, y, z)$ – заданная функция, определенная и непрерывная во всех точках тела [2].

Общий вид краевого условия, из которого могут быть получены выражения для краевых условий в более простых частных случаях [3]:

$$-k\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{Г} = h(T\big|_{Г} - \overset{\square}{T}).$$

В настоящей работе была рассмотрена первая краевая задача для уравнения теплопроводности в двумерном случае для простейшей области – прямоугольника:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}),\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ t > 0;$$

$$T(0, y, t) = 0,\ T(l_1, y, t) = 0;\ \ T(x, 0, t) = 0,\ T(x, l_2, t) = 0;\ \ T(x, y, 0) = \varphi(x, y).$$

Применяя метод разделения переменных, были определены ненулевые решения задачи: $T(x, y, t) = X(x)Y(y)K(t).$

Посредством несложных преобразований, получено

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{a}\frac{K'(t)}{K(t)}.$$

Каждое из отношений предыдущего равенства зависит только от одной переменной. Поэтому данное равенство возможно для всех значений переменных x, y, t из рассматриваемой области только если указанные отношения постоянны, т. е.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \qquad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu, \qquad \frac{1}{a}\frac{K''(t)}{K(t)} = -(\mu + \lambda).$$

Таким образом, получены две задачи Штурма-Лиувилля и их решения с учетом граничных условий из приведенных выше отношений:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, X(0) = X(l_1) = 0,\ \ Y''(y) + \mu Y(y) = 0, Y(0) = Y(l_2) = 0.$$

$$\lambda_k = (\frac{\pi k}{l_1})^2, X_k(x) = \sin\frac{\pi k}{l_1}x, k \in N,\ \ \mu_k = (\frac{\pi m}{l_2})^2, Y_k(y) = \sin\frac{\pi m}{l_2}y, m \in N,$$

Функция T(t) должна удовлетворять уравнению:

$$K'(t) + a\omega_{km}^2 K(t) = 0.$$

Общее решение уравнения имеет вид: $K_{km}(t) = A_{km}e^{-a(\omega_{km})^2 t}$.

Таким образом, математическое выражение для искомых функций принимает вид:

$$T_{km}(x, y, t) = X_k(x)Y_m(y)K_{km}(t) = A_{km}\sin\frac{\pi k}{l_1}x\sin\frac{\pi m}{l_2}ye^{-a(\omega_{km})^2 t},$$

Необходимо определить линейную комбинацию этих функций, которая обеспечивает выполнение начального условия. Для этого необходимо воспользоваться ортогональной в прямоугольнике 0 < x < 1, 0 < y < 12 системой функций

$$\{v_{km}(x,y)\} = \left\{\sin\frac{\pi k}{l_1}x \cdot \sin\frac{\pi m}{l_2}y\right\}, k, m \in N,$$

квадрат нормы которых $\|v_{km}\|^2 = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} v_{km}^2(x,y)dxdy = \frac{l_1 l_2}{4}.$

Решение задачи ищется в виде линейной комбинации функций:

$$T(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{km}v_{km}(x,y)e^{-a(\omega_{km})^2 t}.$$

Определив из начального условия коэффициенты, окончательно получаем функцию вида:

$$T(x,y,t) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{k,m=1}^{\infty}\left[\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\varphi(x,y)\sin\frac{\pi k}{l_1}x * \sin\frac{\pi m}{l_2}ydxdy\right]e^{-a(\omega_{km})^2 t}\cdot\sin\frac{\pi k}{l_1}x\cdot\sin\frac{\pi m}{l_2}y.$$

Таким образом, представленные в настоящей работе результаты показывают возможность применения метода разделения переменных для решения двумерных задач теплопроводности. Апробация указанных расчетов на практике и сравнительный анализ результатов численного моделирования с экспериментальными результатами, полученными иными физическими измерительными методами, являются актуальными задачами дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

2. Егоров, В. И. Аналитические методы решения задач теплопроводности : учебное пособие / В. И. Егоров. – Санкт-Петербург : Университет ИТМО, 2015. – 38 с.

3. Мазо, А. Б. Основы теории и методы расчета теплопередачи : учебное пособие / А. Б. Мазо. – Казань : Казан. ун-т, 2013. – 144 с.