SU(4, 4) – СИММЕТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ ГЕОМЕТРИЗОВАННОГО ОПИСАНИЯ ВНУТРЕННИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ

В. А. Плетюхов, А. М. Кузьмич
Учреждение образования «Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина», г. Брест, Республика Беларусь

Требование релятивистской инвариантности законов природы применительно к теории элементарных частиц заставило задуматься о наличии у этих частиц внутренней степени свободы – спина. Наиболее известное уравнение, описывающее частицу со спином ½, – уравнение Дирака. Оно послужило образцом построения теории для частиц с другими значениями спина. Данный подход получил название теория релятивистских волновых уравнений (РВУ). Однако в своём нынешнем состоянии теория РВУ способна предложить модели, включающие не только спин, но и другие (изоспиновые) степени свободы элементарных частиц [1]. Например, в работе [2] описано SU(6, 6) – симметричное обобщение поля Дирака-Кэлера [3], подходящее для описания поколений кварков. Полевое описание элементарных частиц посредством РВУ первого порядка базируется на теории представлений группы Лоренца – группы унимодулярных ортогональных преобразований SO(3,1) в псевдоевклидовом пространстве размерности 3+1. При этом одно из основных требований, вытекающих из постулатов специальной теории относительности, заключается в том, что волновая функция указанных РВУ должна преобразовываться по некоторому приводимому представлению группы Лоренца, которое состоит из зацепляющихся неприводимых представлений этой группы.

Рассмотрим SU(4, 4) – симметричную систему тензорных уравнений, содержащую 32 компоненты. Запишем явный вид этой системы:

$$
\begin{gathered}
\partial_\nu \psi_{\nu[\alpha\beta]} + \text{æ}\psi_{[\alpha\beta]} = 0,\\
\frac{1}{2}\big(-\partial_\mu \psi_{\nu[\alpha\beta]} + \partial_\nu \psi_{\mu[\alpha\beta]} - \partial_\alpha \psi_{\beta[\mu\nu]} + \partial_\beta \psi_{\alpha[\mu\nu]} + \\
+ i\varepsilon_{\mu\nu\eta\xi}\partial_\eta \psi_{\xi[\alpha\beta]} + i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\xi}\partial_\eta \psi_{\xi[\mu\nu]}\big) + \text{æ}\psi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} = 0,\\
\partial_\nu \psi_{([\mu\nu][\alpha\beta])} + \frac{1}{2}\big(\partial_\beta \psi_{[\alpha\mu]} - \partial_\alpha \psi_{[\beta\mu]} + \delta_{\mu\alpha}\partial_\nu \psi_{[\nu\beta]} - \\
- \delta_{\mu\beta}\partial_\nu \psi_{[\nu\alpha]}\big) + i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\nu}\partial_\eta \psi_{[\nu\mu]} + \text{æ}\psi_{\mu[\alpha\beta]} = 0,\\
\partial_\nu \breve{\psi}_{\nu[\alpha\beta]} + \text{æ}\breve{\psi}_{[\alpha\beta]} = 0, \qquad (1)\\
\frac{1}{2}\big(-\partial_\mu \breve{\psi}_{\nu[\alpha\beta]} + \partial_\nu \breve{\psi}_{\mu[\alpha\beta]} - \partial_\alpha \breve{\psi}_{\beta[\mu\nu]} + \partial_\beta \breve{\psi}_{\alpha[\mu\nu]} - \\
- i\varepsilon_{\mu\nu\eta\xi}\partial_\eta \breve{\psi}_{\xi[\alpha\beta]} - i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\xi}\partial_\eta \breve{\psi}_{\xi[\mu\nu]}\big) + \text{æ}\breve{\psi}_{([\mu\nu][\alpha\beta])} = 0,\\
\partial_\nu \breve{\psi}_{([\mu\nu][\alpha\beta])} + \frac{1}{2}\big(\partial_\beta \psi_{[\alpha\mu]} - \partial_\alpha \breve{\psi}_{[\beta\mu]} + \delta_{\mu\alpha}\partial_\nu \breve{\psi}_{[\nu\beta]} - \\
- \delta_{\mu\beta}\partial_\nu \breve{\psi}_{[\nu\alpha]}\big) - i\varepsilon_{\alpha\beta\eta\nu}\partial_\eta \breve{\psi}_{[\nu\mu]} + \text{æ}\breve{\psi}_{\mu[\alpha\beta]} = 0.
\end{gathered}
$$

Здесь тензоры $\psi_{[\mu\nu]}, \check{\psi}_{[\mu\nu]}, \psi_{\lambda[\mu\nu]}, \check{\psi}_{\lambda[\mu\nu]}, \psi_{\alpha}, \psi_{[\mu\nu][\alpha\beta]}, \psi_{([\mu\nu][\alpha\beta])}, \psi_{([\mu\nu][\alpha\beta])}$ сопоставляются представлениям (0, 1), (1, 0), (1/2, 3/2), (3/2, 1/2), (1/2, 1/2) (1, 1), (0, 2) и (2, 0) соответственно.

Согласно теории РВУ с помощью этой системы можно описать микрообъекты с набором спинов S = 1, 2. Но благодаря внутренней SU(4, 4) симметрии можно дать и иную трактовку. Из того факта, что преобразования Q группы внутренней симметрии образует полупрямое произведение с Лоренцевской симметрией системы (1), вытекает возможность двоякого разложения алгебры A_R группы R полной инвариантности теории:

$$A_R = \{J_{\mu\nu}\} \oplus \left(\{d_\mu\} \oplus \{Q\}\right), \tag{2}$$

$$A_R = \left(\{\check{J}_{\mu\nu}\} \oplus \{d_\mu\}\right) \oplus \{Q\}. \tag{3}$$

Здесь $J_{\mu\nu}$ – инфинитезимальные операторы группы Лоренца Λ, d_μ – генераторы пространственно-временных трансляций, $\check{J}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu}$, символ $\oplus$ означает полупрямую сумму.

Из разложения (3) вытекает, что группу полной инвариантности лагранжиана теории можно представить в виде прямого произведения $\Lambda' \otimes Q$, где Λ' – «переопределенная» группа Лоренца, по отношению к которой волновая функция Ψ характеризует уже не совокупность тензорных величин, а набор четырех дираковских полей с обычной, то есть коммутирующей с преобразованиями группы Лоренца, внутренней симметрией.

Приведенные соображения сохраняют силу для всех взаимодействий (в том числе калибровочных), не нарушающих внутреннюю симметрию свободного лагранжиана. Они означают принципиальную применимость уравнения Дирака-Кэлера для описания частиц со спином S = 1/2 и внутренними степенями свободы, имеющими, таким образом, геометрическое происхождение. Наборы тензорных полей, подчиняющихся уравнениям (1), могут рассматриваться в качестве геометрического аналога фермионного поля с внутренними степенями свободы.

На квантовом уровне установлена возможность корректного квантования системы (1) по статистике Ферми-Дирака [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларуская навука, 2015. – 326 с.

2. Кузьмич, А. М. Описание внутренних степеней свободы дираковских частиц посредством тензорных полей / А. М. Кузьмич, В. А. Плетюхов // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Сер. 4. Фізіка. Матэматыка. – 2022. – № 1. – С. 29–41.

3. Benn, I. M. A generalization model, based on Kahler fermions / I. M. Benn, R. W. Tucker // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 119, № 4–6. – P. 348–350.