ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ В ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ ПО ФИЗИКЕ

А. И. Слободянюк
Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

Основной тенденцией развития лабораторного практикума по общей физике является более широкое использование современных электронных измерительных приборов и автоматизация эксперимента. Такие лабораторные установки позволяют получать, во-первых, более точные результаты, во-вторых – в большем объеме. Однако методы обработки полученных результатов остаются, как правило, предельно простыми. В данной работе рассматривается общий метод анализа экспериментально полученных функциональных зависимостей. Основные идеи рассматриваемого подхода изложены книге [1].

Будем использовать следующую модель измерений. При точно заданном значении аргумента x_k результат измерения величины y_k может быть представлен в виде

$$y_k = f\left(x_k \middle| a_0, a_1, ..a_M\right) + \varepsilon_k , \qquad (1)$$

где $f\left(x_k \middle| a_0, a_1, ..a_M\right)$ – некоторая известная функция от x, содержащая набор неизвестных параметров $a_0, a_1, ..a_M$, подлежащих определению; ε_k – случайные ошибки измерения. Будем считать, что ошибки измерений являются независимыми случайными величинами, подчиняющимися нормальному распределению с нулевым математическим ожиданием и одинаковыми дисперсиями σ_0^2. Задачей анализа является определение величин параметров функции и оценка их погрешностей.

Хорошо известно, что в рамках данной модели лучшими оценками являются оценки, полученные по методу наименьших квадратов (МНК), так они являются несмещенными и эффективными. Отметим, что оценки, полученные этим методом, являются оптимальными и в том случае, когда ошибки измерений не подчиняются нормальному распределению.

Суть МНК сводится к нахождению таких параметров, при котором сумма квадратов отклонений принимает минимальное значение:

$$R = \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - f\left(x_k \middle| \hat{a}_0, \hat{a}_1, ..\hat{a}_M\right)\right)^2 = \min . \qquad (2)$$

Для вычисления оценок параметров $\hat{a}_0, \hat{a}_1, ..\hat{a}_M$ в общем случае необходимо решать систему нелинейных уравнений. Кроме того, возникают серьезные математические проблемы с получением формул для оценок погрешностей этих параметров.

Ситуация существенно упрощается если функция $f\left(x_k \middle| a_0, a_1, ..a_M\right)$ линейно зависит от искомых параметров, т. е. представляет собой разложение по некоторому набору базисных функций $q_m(x)$:

$$f(x|a_0, a_1, ..a_M) = \sum_{m=0}^{M} a_m q_m(x). \tag{3}$$

В этом случае система уравнений для определения коэффициентов разложения оказывается линейной. Широко используемым случаем является разложения по степенным функциям $q_m(x) = x^m$ (разложение Тейлора). Несмотря на существенное упрощение, здесь остаются существенные проблемы. Выражения для коэффициентов разложения для нелинейных функция являются достаточно громоздкими, что затрудняет оценку погрешностей. Но более важной является проблема определения разумного и обоснованного выбора числа членов разложения (3). Кроме того, при увеличении числа слагаемых необходимо каждый раз заново пересчитывать уже найденные значения коэффициентов.

Эти проблемы легко разрешаются специальным выбором базисных функций $q_m(x)$. В качестве такого набора следует использовать функции, ортогональные на дискретном множестве точек $(x_k\ k = 0, 1, 2 ...N)$, т. е. удовлетворяющие условиям

$$\sum_{k=0}^{N} q_m(x_k) q_l(x_k) = \delta_{m,l}, \tag{4}$$

где $\delta_{m,l}$ – символ Кронекера.

Такой выбор базисных функций имеет целый ряд несомненных преимуществ.

1. Формулы для оценок коэффициентов разложения имеют простой вид

$$\hat{a}_m = \sum_{k=0}^{N} y_k q_m(x_k). \tag{5}$$

2. Любой коэффициент может быть рассчитан независимо от остальных, поэтому увеличение числа слагаемых в разложении не приводит к необходимости пересчета найденных коэффициентов.

3. Все оценки коэффициентов являются нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией, совпадающей с дисперсией ошибки отдельного измерения σ_0^2. Поэтому погрешности всех коэффициентов одинаковы. Если величина σ_0^2 неизвестна, то она может быть оценена по формуле

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{k=-}^{N} (y_k - f(x_k))^2}{N - M - 1} = \frac{NS_y^2 - \sum_{m=0}^{M} \hat{a}_m^2}{N - M - 1}, \tag{6}$$

где S_y^2 – выборочная дисперсия результатов измерений всех значений y_k.

Тогда формула для оценки погрешности коэффициентов имеет вид

$$\Delta a_m = t_{\nu,p} \sqrt{\hat{\sigma}_0^2}. \tag{7}$$

4. Сумма квадратов остатков после вычитания M членов разложения вычисляется элементарно

$$R_M = \sum_{k=0}^{N}\left(y_k - \sum_{m=0}^{M} \hat{a}_m q_m(x_k) \right)^2 = NS_y^2 - \sum_{m=0}^{M} \hat{a}_m^2 = R_{M-1} - \hat{a}_M^2 \ , \qquad (8)$$

может служить критерием, позволяющим определить, сколько слагаемых в разложении следует оставить.

В докладе рассматриваются конкретные примеры применения изложенной модификации метода наименьших квадратов для традиционных лабораторных работ курса общей физики.

1. Изучение цепей переменного тока.

Анализируется степень гармоничности полученных зависимостей силы тока и напряжения. Рассчитывается величина сдвига фаз между этими величинами.

2. Изучение поляризации света.

Анализируется справедливость закона Малюса. Рассчитываются параметры зависимости интенсивности света от угла поворота анализатора

$$I = I_0 + I_1 \cos^2(\alpha - \alpha_0). \qquad (9)$$

Рассчитываются параметры зависимости интенсивности света от угла поворота кристаллической пластинки

$$I = I_0 + I_1 \sin^2 2(\alpha - \alpha_0). \qquad (10)$$

3. Изучение равномерного и равноускоренного движений.

Анализируются условия применимости указанных моделей движения, рассчитываются их кинематические характеристики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худсон, Д. Статистика для физиков / Д. Худсон. – Москва : Мир, 1970. – 296 с.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ В ЛАБОРАТОРНОМ ФИЗИЧЕСКОМ ПРАКТИКУМЕ

Н. П. Юркевич, Г. К. Савчук
Белорусский национальный технический университет,
г. Минск, Республика Беларусь

Целью данной работы является адаптация и использование компьютерного моделирования кристаллического строения твердых тел для обучения студентов инженерно-строительного профиля на занятиях лабораторного физического практикума.

Использование и разработка приложений компьютерного моделирования физических процессов является актуальной задачей процесса обучения студентов инженерно-технического профиля [1−4]. Данную задачу можно решить в рамках лабораторного физического практикума, как, например, реализовано в [5−7]. Использование приложений направлено на то, чтобы будущий специалист приобретал навыки исследовательской работы и компетентно решал про-