УДК 519.2

И.В. ПАРХАЧ, И.Н. МЕЛЬНИКОВА
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В случае процессов гибели и размножения для цепи Маркова с состоянием s_i связывают неслучайную величину x_i : если система S в момент времени t находится в состоянии s_i, то дискретная случайная величина $X(t)$, связанная с функционированием системы, принимает значение i. Таким образом, получаем случайный процесс $X(t)$, который в случайные, заранее неизвестные моменты времени скачком изменяет свое состояние. Одномерный закон распределения с.п. $X(t)$ определяется равенством

$$P\{X(t)=i\}=P\{S(t)=s_i\}=p_i(t) \quad (i=0,1,2,...).$$

В марковском процессе гибели и размножения с непрерывным временем скачки функции $X(t)$ могут произойти в любой момент времени t. Таким образом, марковским процессом гибели и размножения с непрерывным временем можно назвать такой случайный процесс, который может принимать только целые неотрицательные значения; изменения этого процесса могут происходить в любой момент времени t, при этом в любой момент времени он может либо увеличиться на единицу, либо остаться неизменным. Коротко такой процесс будем называть процессом гибели и размножения. Размеченный граф состояний $G(S)$ процесса гибели и размножения показан на рисунке.

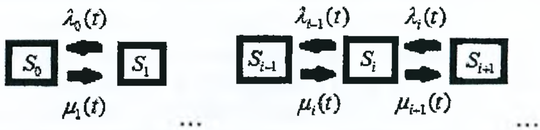
Интенсивности пуассоновских потоков событий, ведущих к увеличению функции $X(t)$ ("размножению"), обозначены $\lambda_i(t)$, где индекс i соответствует индексу того состояния S_i, из которого выходит стрелка. Интенсивность пуассоновских потоков событий, ведущих к уменьшению функции $X(t)$ ("гибели"), обозначены $\mu_i(t)$, где индекс i также соответствует индексу того состояния S_i, из которого выходит стрелка. Пуассоновские потоки событий, ведущие к «размножению» процесса $X(t)$ (интенсивности которых обозначены буквой μ с индексом), будем называть потоками гибели. Очевидно, что одномерный закон распределения процесса гибели и размножения *X(t)* можно определить с помощью системы уравнений Колмогорова для графа $G(S)$, изображенного на рисунке:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu_1(t)p_1(t) - \lambda_1(t)p_0(t),$$

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}(t)p_{i-1}(t) + \mu_{i+1(t)}p_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_i(t))p_i(t), (i = 1,2,3,...),$$

где $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\} = P\{X(t) = i\}, (i = 0,1,2,...)$. Систему нужно решать при начальных условиях $p_i(0) \geq 0 (i = 0,1,2,...)$, при этом $\sum_i p_i(0) = 1$.

В инженерных приложениях обычно имеют дело с процессами гибели и размножения с ограниченным числом состояний, когда $0 \leq X(t) \leq n$. У такого процесса $n+1$ состояний; размеченный граф состояний показан на рисунке



Система уравнений Колмогорова для процесса гибели и размножения с ограниченный числом состояний имеет вид:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu_1(t)p_1(t) - \lambda_0(t)p_0(t),$$

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}(t)p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}(t)p_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_i(t))p_i(t), (i = 1,2,3,...,n-1),$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}(t)p_{n-1}(t) - \mu_n(t)p_n(t).$$

Эту систему нужно решать при начальных условиях $p_i(0) \geq 0$ $(i = 0,1,2,...n)$, при этом $\sum_{i=1} p_i(0) = 1$.

Процесс *X(t)* представляет собой скачкообразную неубывающую целочисленную функцию, скачки которой могут принимать значение "+1". Если интенсивность $\lambda(t) = \lambda = const$, то получим однородный процесс Пуассона Для такого процесса при $p_0(0) = 1, p_i(0) = 0......(i \geq 0)$

$$P\{X(t) = i\} = p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t} ......(i = 0,1,2,...).$$

Характеристики процесса Пуассона будут $M[X(t)] = D[X(t)] = \lambda t$.