УДК 519.2

И.Н. МЕЛЬНИКОВА, Л.Н. САВЧУК
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ПРИЛОЖЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ВЕТВЯЩИМСЯ ПРОЦЕССАМ

Рассмотрим процесс «размножения» для совокупности частиц, каждая из которых с течением времени превращается в частицы такого же типа. Этот процесс обладает свойством: каждая из исходных частиц через время t независимо друг от друга и от обстоятельств, предшествующих исходному моменту, с одинаковой для всех частиц вероятностью $P_k(t)$ порождает группу из k частиц. Через $\xi(t)$ обозначим число частиц, имеющихся к моменту времени t. Такая эволюция величины $\xi(t)$ представляет собой марковский случайный процесс. Процесс такого типа называется ветвящимся. Эта модель может быть использована при рассмотрении многих реальных процессов, в том числе и для изучения эффектов вырождения и взрыва. Пусть в некоторый исходный момент времени s, скажем, $s = 0$, имеется ровно k частиц. Обозначим $\xi_i(t)$ число частиц, порожденных i-той частицей (i=1,2,…,k) через время t. Тогда общее число частиц через время t будет

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \ldots + \xi_k(t). \qquad (1)$$

Здесь случайные величины $\xi_i(t),\ldots,\xi_k(t)$ независимы между собой и имеют одно и то же распределение вероятностей:

$$P(\xi_i(t) = n) = p_n(\mathrm{t}),\ n = 0,1,\ldots \qquad (2)$$

Построим производящие функции вида

$$F(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n, \quad F_k(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{kn}(t) z^n, \qquad (3)$$

где $p_{nk}(t)$ есть переходные вероятности марковского ветвящегося процесса $\xi(t)$ ($p_{kn}(t)$ есть вероятность того, что k частиц за время t порождают n частиц). Пусть отдельная частица за малый промежуток времени Δt с вероятностью

$$p_n(\Delta t) = \lambda_n \Delta t + \Theta(\Delta t),\ n \neq 1 \qquad (4)$$

превращается в n новых частиц, а с вероятностью

$$p_n(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t - \Theta(\Delta t) \qquad (5)$$

остается неизменной. Пусть, далее,

$$\lambda_1 = -\lambda, \text{ где } \sum_k \lambda_k = 0 \qquad (6)$$

переходные вероятности $p_n(t) = p_{1n}(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям Колмогорова

$$\frac{d}{dt}p_n(t)=\sum_k \lambda_k p_{kn}(t), n=0,1,... \tag{7}$$

При каждом z, $|z| \le 1$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{d}{dt}p_n(t)=\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)z^n=\sum_k \lambda_k \sum_{n=0}^{\infty} p_{kn}(t)z^n.$$

Таким образом, имеет место дифференциальное уравнение для производящей функции $F(t, z)$

$$\frac{d}{dt}F_n(t,z)=\sum_k \lambda_k F_k(t,z).$$

Здесь $F(t,z)$ − функции, определенные формулой (3), являющиеся производящими функциями случайной величины $\zeta(t)$ для k исходных частиц, где $k = 0,1,...$ Эта величина $\zeta(t)$, согласно равенству (1), есть сумма k независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение вероятностей с производящей функцией $F(t, z)$. Поэтому $F_k(t,z) = [F(t,z)]^{\kappa}$, $k = 0, 1,...$, так что дифференциальное уравнение для производящей функции $F(t, z)$ может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dt}F(t,z)=\sum_k \lambda_k F(t,z)^k. \tag{8}$$

Будем считать, что заданными параметрами ветвящегося процесса $\zeta(t)$ являются плотности перехода λ_k, $k = 0, 1, ...$ Введем функцию

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x^k. \tag{9}$$

Она является аналитической при $0 < x < 1$, и формула (9) дает ее разложение в степенной ряд. Согласно равенству (8), производящая функция $F(t,z)$ является решением дифференциального уравнения вида

$$\frac{dF}{dt}=f(x). \tag{10}$$

Поскольку $F(0, z) = z$, производящая функция $F(t, z)$ при каждом z, $0 \le z \le 1$, совпадает с решением $x = x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию $x(0) = z$. Вместо уравнения (10) удобно рассмотреть эквивалентное ему дифференциальное уравнение для обратной к $x = x(t)$ функции $t = t(x)$:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{f(x)}.$$

Как решение этого уравнения функция $t = t(x)$ имеет вид

$$t=\int_z^x \frac{du}{f(u)}, 0 \le x \le 1.$$