УДК 517.923

Т.И. Шило, Е.В. Грицук

О ГОЛОМОРФНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ БРИО И БУКЕ

В работе найдены условия существования голоморфных решений систем двух уравнений Брио и Буке.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \tau \dfrac{dU}{d\tau} = \alpha_1 U + \beta_1 V + F_1(\tau, U, V) \\ \tau \dfrac{dV}{d\tau} = \alpha_2 U + \beta_2 V + F_2(\tau, U, V) \end{cases}, \qquad (1)$$

где F_1, F_2 – голоморфные функции в окрестности точки $\tau=U=V=0$, исчезающие в нуле вместе с частными производными по U и V.

В настоящей работе рассмотрим вопрос существования голоморфных решений $(U(\tau), V(\tau))$ системы (1), обладающих свойством:

$$U(\tau)\to 0,\ V(\tau)\to 0 \text{ при } \tau\to 0. \qquad (\alpha)$$

Этой проблеме посвящено много работ различных авторов. Так, в работах [1,2] Мячин, Еругин изучали структуру неголоморфных решений системы (1), обладающих свойством (α), уделив особое внимание случаям, когда корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (A)$$

являются целыми положительными числами или если оба корня обладают положительными действительными частями. Однако условия существования голоморфных решений в этих случаях и в случае кратных корней в работах [1,2] не рассмотрены.

Метод построения таких решений в нашей работе подобен методу Еругина. В отличие от Еругина мы используем более простые мажорантные функции, что позволяет находить область сходимости рядов, в виде которых представляется решение системы (1).

§1. Пусть корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения различны, причём $\lambda_1 = n$ – целое положительное число, λ_2 не является целым положительным числом. В этом случае с помощью линейного невырожденного преобразования

$$\begin{cases} u = \alpha_1 U + \beta_1 V \\ v = \alpha_2 U + \beta_2 V \end{cases}$$

систему (1) всегда можно свести к системе

$$\begin{cases} \tau \dfrac{du}{d\tau} = nu + p\tau + F_1(\tau, u, v) \\ \tau \dfrac{dv}{d\tau} = \lambda_2 u + q\tau + F_2(\tau, u, v), \end{cases} \qquad (1^*)$$

где F_1, F_2 – голоморфные функции в окрестности точки $\tau=u=v=0$. Сделав замену

$$\begin{cases} u = (\alpha_1 + u_1)\tau \\ v = (\beta_1 + v_1)\tau, \end{cases} \qquad (2)$$

где $\alpha_1 = \dfrac{p}{1-n}$, $\beta_1 = \dfrac{q}{1-\lambda_2}$, придем к системе типа (1*), но вместо n стоит $n-1$:

$$\begin{cases} \tau \dfrac{du_1}{d\tau} = (n-1)u_1 + p_1\tau + F_1'(\tau, u_1, v_1) \\ \tau \dfrac{dv_1}{d\tau} = (\lambda_2 - 1)v_1 + q_1\tau + F_2'(\tau, u_1, v_1). \end{cases}$$

Применив замену вида (2) $n-1$ раз, мы придем к системе

$$\begin{cases} \tau \dfrac{du_{n-1}}{d\tau} = u_{n-1} + p_{n-1}\tau + \Phi_1(\tau, u_{n-1}, v_{n-1}) \\ \tau \dfrac{dv_{n-1}}{d\tau} = (\lambda_2 - n + 1)v_{n-1} + q_{n-1}\tau + \Phi_2(\tau, u_{n-1}, v_{n-1}), \end{cases} \quad (3)$$

корни характеристического уравнения которой $\overline{\lambda_1} = 1$, $\overline{\lambda_2} = \lambda_2 - n + 1$.
После этих преобразований будем иметь

$$u = \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\tau^{n-1} + \tau^{n-1}u_{n-1},$$
$$v = \beta_1\tau + \beta_2\tau^2 + \ldots + \beta_{n-1}\tau^{n-1} + \tau^{n-1}v_{n-1}.$$

Выясним, при каких условиях система (3) имеет голоморфное решение вида

$$u_{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\tau^k, v_{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\tau^k. \quad (4)$$

Подставив (4) в систему (3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях τ слева и справа в полученных тождествах, будем иметь:

$$\begin{cases} c_1 = c_1 + p_{n-1} \\ d_1 = (\lambda_2 - n + 1)d_1 + q_{n-1}, \end{cases}$$

откуда $p_{n-1} = 0$, $d_1 = \dfrac{q_{n-1}}{n - \lambda_2}$, c_1 – произвольная постоянная.

Если же $p_{n-1} \neq 0$, то система (3), а значит и система (1*) не имеет голоморфных решений.

Предположим, что $p_{n-1} = 0$. В этом случае коэффициенты решений (4) определяются с точностью до постоянного множителя c_1. Полагая

$$\begin{cases} u_{n-1} = (c_1 + u_n)\tau \\ v_{n-1} = \left(\dfrac{q_{n-1}}{n - \lambda_2} + v_n\right)\tau, \end{cases}$$

получаем систему

$$\begin{cases} \tau \dfrac{du_n}{d\tau} = p_n\tau + \tau^2 h(\tau, u_n, v_n) \\ \tau \dfrac{dv_n}{d\tau} = (\lambda_2 - n)v_n + q_n\tau + \tau^2 g(\tau, u_n, v_n). \end{cases} \quad (5)$$

Поскольку корни характеристического уравнения системы (5) не являются целыми положительными числами и различны, то система (5) [2] имеет единственное голоморфное решение

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha}_k\tau^k, v_n = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\beta}_k\tau^k.$$

Из вышесказанного следует

<u>Теорема 1</u>. Если $p_{n-1} \neq 0$, то система (1*) не имеет голоморфных решений, обладающих свойством (α). При $p_{n-1} = 0$ система (1*) имеет однопараметрическое семейство голоморфных решений вида:

$$\begin{cases} u(\tau) = \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + \ldots + \alpha_{n-1}\tau^{n-1} + \tau^n\left(c_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha}_k\tau^k\right) \\ v(\tau) = \beta_1\tau + \beta_2\tau^2 + \ldots + \beta_{n-1}\tau^{n-1} + \tau^n\left(\dfrac{g_{n-1}}{n - \lambda_2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \overline{\beta}_k\tau^k\right), \end{cases}$$

где c_1 – произвольный параметр, а $\overline{\alpha}_k$ и $\overline{\beta}_k$ известным образом зависят от c_1.

§2 Предположим, что корни характеристического уравнения (A) кратные и не являются целыми положительными числами. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \kappa$.

В случае кратных корней систему (1) можно заменить системой вида

$$\begin{cases} \tau \dfrac{du}{d\tau} = \kappa u + p\tau + F_1(\tau, u, v) \\ \tau \dfrac{dv}{d\tau} = \gamma u + \kappa v + q\tau + F_2(\tau, u, v), \end{cases} \qquad (1'')$$

где

$$F_s(\tau, u, v) = \sum_{i+j+k\geq 2} \alpha_{ij}^{(s)} \tau^i u^j v^k$$

голоморфные функции в области $|\tau| < r$, $|v| < \rho$, $|u| < \rho$.

Предположив, что система (1") имеет голоморфные решения вида

$$u(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tau^n, v(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tau^n, \qquad (6)$$

подставим (6) в систему (1") и получим тождества:

$$\begin{cases} na_n \tau^n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} ka_n \tau^n = \\ = p\tau + \sum\limits_{i+j+k\geq 2} \alpha_{ijk}^{(1)} \tau^i \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \tau^n \right)^j \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \tau^n \right)^k \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n \tau^n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} kb_n \tau^n = \\ = \gamma \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \tau^n + q\tau + \sum\limits_{i+j+k\geq 2} \alpha_{ijk}^{(2)} \tau^i \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \tau^n \right)^j \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \tau^n \right)^k. \end{cases} \qquad (7)$$

Отсюда видим, что если $\kappa \neq n$, т.е. не является целым положительным числом, то формальное решение (6) существует, и коэффициенты a_n и b_n определяются единственным образом по формулам

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{n-k} P_1\left(\alpha_{100}^{(s)}, \ldots \alpha_{0,0,n-1}^{(s)}, a_1, \ldots a_{n-1}, b_1, \ldots b_{n-1}\right), \\ b_n = \dfrac{1}{n-k} P_2\left(\alpha_{100}^{(s)}, \ldots \alpha_{0,0,n-1}^{(s)}, a_1, \ldots a_{n-1}, b_1, \ldots b_{n-1}\right) \end{cases} \qquad (8)$$

где P_1 и P_2 – полиномы от коэффициентов рядов F_1 и F_2 и коэффициентов a_i, b_i (i=1,..n–1).

Для доказательства сходимости формально построенных рядов вида (6) применим метод мажорантных функций. Обозначим через

$$\varepsilon = \min_{n\in N} \{|n-k|\}.$$

Если взять $r_1 < r$, $\rho_1 < \rho$, то при

$$|\tau| \leq r_1, |u| \leq \rho_1, |v| \leq \rho_1, \qquad (9)$$

функции $F_s(\tau, u, v)$ (s=1,2) ограничены, т.е. найдется такое число M, что при выполнении неравенств (9) имеем

$$|F_s(\tau, u, v)| \leq M \text{ (s=1,2)},$$

$$\left|\alpha_{ijk}^{s}\right| \leq \frac{M}{r_1^i \rho_1^{j+k}} = A_{ijk}^{(s)}. \qquad (10)$$

Рассмотрим мажорантную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon u = \dfrac{M}{\left(1-\dfrac{\tau}{r_1}\right)\left(1-\dfrac{u}{\rho_1}\right)\left(1-\dfrac{v}{\rho_1}\right)} - M - M\dfrac{u+v}{\rho_1} \\ \varepsilon v = \dfrac{M}{\left(1-\dfrac{\tau}{r_1}\right)\left(1-\dfrac{u}{\rho_1}\right)\left(1-\dfrac{v}{\rho_1}\right)} - M - M\dfrac{v}{\rho_1}. \end{cases} \tag{11}$$

Подставляя в систему (11) ряды

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \tau^n,\ v = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \tau^n, \tag{12}$$

для определения коэффициентов A_n и B_n получим равенства, подобные (8):

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{1}{\varepsilon} P_1(A_{100}^{(s)},\dots, A_{0,0,n-1}^{(s)}, A_1,\dots A_{n-1}, B_1,\dots B_{n-1}) \\ B_n = \dfrac{1}{\varepsilon} P_2(A_{100}^{(s)},\dots, A_{0,0,n-1}^{(s)}, A_1,\dots A_{n-1}, B_1,\dots B_{n-1}). \end{cases}$$

Так как P_1, P_2 – полиномы с положительными коэффициентами, то выполняются оценки

$$|a_n| = \frac{\left|P_1(\alpha_{100}^{(s)},\dots, \alpha_{0,0,n-1}^{(s)}, a_1,\dots, a_{n-1}, b_1,\dots, b_{n-1})\right|}{|n-k|} \le$$

$$\le \frac{P_1(|\alpha_{100}^{(s)}|,\dots, |\alpha_{0,0,n-1}^{(s)}|, |a_1|,\dots, |a_{n-1}|, |b_1|,\dots, |b_{n-1}|)}{|n-k|} \le$$

$$\le \frac{P_1(A_{100}^{(s)},\dots, A_{0,0,n-1}^{(s)}, A_1,\dots, A_{n-1}, B_1,\dots, B_{n-1})}{\varepsilon} = \frac{A_n}{\varepsilon}$$

$$|b_n| = \frac{\left|P_2(\alpha_{100}^{(s)},\dots, \alpha_{0,0,n-1}^{(s)}, a_1,\dots, a_{n-1}, b_1,\dots, b_{n-1})\right|}{|n-k|} \le \frac{B_n}{\varepsilon}.$$

Откуда следует, что ряды (12) являются мажорантными для рядов (6).
Поскольку

$$\frac{M}{\left(1-\dfrac{u}{\rho_1}\right)\left(1-\dfrac{v}{\rho_1}\right)} \ll \frac{M}{1-\dfrac{u+v}{\rho_1}},$$

то мажорантные ряды можно получить из системы

$$\begin{cases} \varepsilon u = \dfrac{M}{\left(1-\dfrac{\tau}{r_1}\right)\left(1-\dfrac{u+v}{\rho_1}\right)} - M - M\dfrac{u+v}{\rho_1} \\ \varepsilon v = \dfrac{M}{\left(1-\dfrac{\tau}{r_1}\right)\left(1-\dfrac{u+v}{\rho_1}\right)} - M - M\dfrac{v}{\rho_1}. \end{cases}$$

Откуда

$$v = \left(1+\frac{M}{\varepsilon\rho_1}\right)u.$$

Тогда для определения u получаем уравнение

$$\frac{(2\rho_1\varepsilon + M)(M+\varepsilon\rho_1)^2}{\rho_1^4\varepsilon^2}u^2 - \varepsilon u + \frac{M\tau}{r_1-\tau} = 0.$$

Откуда

$$u = \frac{\rho_1^4 \varepsilon^2}{2(2\rho_1\varepsilon + M)(M + \varepsilon\rho_1)^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4M\tau(2\rho_1\varepsilon + M)(M + \varepsilon\rho_1)^2}{(r_1 - \tau)\rho_1^4\varepsilon^4}}\right).$$

Выбираем ту ветвь корня, чтобы $u(\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$, т.е.

$$u(\tau) = \frac{\rho_1^4 \varepsilon^2}{2(2\rho_1\varepsilon + M)(M + \varepsilon\rho_1)^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4M\tau(2\rho_1\varepsilon + M)(M + \varepsilon\rho_1)^2}{(r_1 - \tau)\rho_1^4\varepsilon^4}}\right). \quad (13)$$

Функция $u(\tau)$ голоморфна в области D:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\tau}{r_1 - \tau}\right| < \dfrac{\rho_1^4\varepsilon^4}{4M(2\rho_1\varepsilon + M)(M + \varepsilon\rho_1)^2}. \\ |\tau| < r_1 \end{cases} \quad (D)$$

Область D представляет собой пересечение двух кругов

$$K_1 = \{\tau \in C \,|\, |\tau| < r_1\}$$

$$K_2 = \left\{\tau \in C \,\middle|\, \left|\tau + \frac{r_1 p^2}{1 - p^2}\right| < \frac{p r_1}{1 - p^2}\right\}, \text{ где}$$

$$p = \frac{\rho_1^4 \varepsilon^2}{4M(2\rho_1\varepsilon + M)(M + \varepsilon\rho_1)^2}.$$

Пересечение является непустым множеством, т.к., по крайней мере, точка $\tau=0$ принадлежит обеим кругам. Область D представляет собой область сходимости мажорантных рядов (12), а значит, в этой области, согласно признаку Вейерштрасса, сходятся ряды (6).

Таким образом, доказана

Теорема 2 . Если корни характеристического уравнения системы (1) кратные и не являются целыми положительными числами, то система (1) имеет единственное голоморфное решение, обладающее свойством (α), представимое в виде рядов (6), сходящихся в области D.

§3. Пусть корни характеристического уравнения кратные и являются целыми положительными числами, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = n$. В этом случае систему (1) всегда можно с помощью линейных невырожденных преобразований привести к системе вида

$$\begin{cases} \tau \dfrac{du}{d\tau} = u + p\tau + F_1(\tau, u, v) \\ \tau \dfrac{dv}{d\tau} = \gamma u + v + q\tau + F_2(\tau, u, v), \end{cases} \quad (1^{**})$$

где

$$F_s(\tau, u, v) = \sum_{i+j+k\ge 2} \alpha_{ij}^{s} \tau^i u^j v^k \qquad (s = 1,2).$$

Если $\gamma \ne 0$, то, подставив ряды вида (6) в систему (1**), получим равенства

$$\begin{cases} a_1 = a_1 + p \\ b_1 = \gamma a_1 + b_1 + q. \end{cases} \quad (14)$$

Откуда находим

$$p = 0, \quad a_1 = -\frac{q}{p}, \quad b_1 \text{ – произвольный параметр.}$$

Произведя замену

$$\begin{cases} u = \left(-\dfrac{q}{\gamma} + u_1 \right) \tau \\ v = (b_1 + v_1)\tau, \end{cases}$$

придем к системе уравнений Брио и Буке вида

$$\begin{cases} \tau \dfrac{du_1}{d\tau} = \tau \Phi_1(\tau, u, v) \\ \tau \dfrac{dv_1}{d\tau} = \gamma u_1 + \tau \Phi_2(\tau, u, v), \end{cases}$$

которая, согласно теореме 2, имеет единственное голоморфное решение, обладающее свойством (α).

Если же $\gamma = 0$, то при $p \neq 0$ и $q \neq 0$ система (1) голоморфных решений не имеет. Поэтому остается выяснить вопрос существования голоморфных решений при $\gamma = p = q = 0$.

Произведя замену

$$u = \tau \tilde{u}, \; v = \tau \tilde{v},$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{u}}{d\tau} = \Phi_1(\tau, \tilde{u}, \tilde{v}) \\ \dfrac{d\tilde{v}}{d\tau} = \Phi_2(\tau, \tilde{u}, \tilde{v}), \end{cases}$$

где Φ_s – голоморфные функции в некоторой окрестности точки $\tau = u = v = 0$. По теореме Коши эта система имеет голоморфное решение, обладающее свойством

$\tilde{u} \to 0, \; \tilde{v} \to 0$, при $\tau \to 0$.

Тогда система (1**) будет иметь голоморфное решение, обладающее свойством (α).

Итак, в случае кратных целых положительных корней система уравнений Брио и Буке как может иметь, так и не может иметь голоморфных решений, обладающих свойством (α). Если $\gamma \neq 0$, $p = 0$ система имеет однопараметрическое семейство голоморфных решений, обладающих свойством (α), если же $\gamma = 0$, то при $p \neq 0$ и $q \neq 0$ система вовсе не имеет голоморфных решений, исчезающих с τ, а при $\gamma = 0$, $p = 0$ и $q = 0$ имеет двухпараметрическое семейство голоморфных решений, обладающих свойством (α).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Мячин В.Ф. //Вестник Ленинградского университета. 1958. №7. С.88-102.
2 Еругин Н.П. Проблема Римана. Мн., 1982.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 06.12.02 г.

***Shilo T.I., Gritsyuk E.V.* On Analytic Decisions of Brio and Buke's Systems.**

The conditions of the existence of analltyc decisions of Brio and Buke's two equation systems are considered in the article.