УДК 517.954

***Александр Иванович Басик*[1], *Евгений Васильевич Грицук*[2], *Елена Андреевна Шикеля*[3]**

[1]*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*

[2]*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина, доц. каф. высшей математики Брестского государственного технического университета*

[3]*студент 4-го курса физико-математического факультета Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*

***Aliaxandr I. Basik*[1], *Evgenij V. Hrytsuk*[2], *Elena A. Shikelia*[3]**

[1]*PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications at the Brest State A. S. Pushkin University*

[2]*PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications at the Brest State A. S. Pushkin University, Assistant Professor of the Department of Higher Mathematics at the Brest State Technical University*

[3]*fourth-year student of the Department of Physics and Mathematics at the Brest State A. S. Pushkin University*

email: [1] alex-basik@yandex.ru; [2] gricuk_e@tut.by; [3] elenashikelia@gmail.com

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Рассматривается множество эллиптических систем двух дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем. Для таких систем изучается вопрос регуляризуемости задачи типа наклонной производной. В каждой компоненте гомотопической связности рассматриваемого множества эллиптических систем приводится представитель, обладающий следующими свойствами: каждая компонента произвольного дважды непрерывно дифференцируемого решения является бигармонической функцией, и краевая задача типа наклонной производной в классической постановке для этого представителя не является нетеровой. Таким образом устанавливается, что регуляризуемость задачи типа наклонной производной для рассматриваемых эллиптических систем не связана с гомотопическим классом системы.

Ключевые слова: *эллиптическая система, регуляризуемая краевая задача, условие Лопатинского, гомотопическая классификация.*

About the Oblique Derivative Type Boundary Value Problem for Second-Oder Elliptic Systems on the Plane

The set of elliptic systems of two second-order partial differential equations on the plane with positive characteristic determinant is considered in this paper. For such systems the question of regularizability of an oblique derivative type problem is studied. In each homotopy class of the set of elliptic systems under consideration, a representative is given that has the following properties: each component of an arbitrary twice continuously differentiable solution is a biharmonic function, and an oblique derivative-type boundary value problem in the classical formulation for this representative is not Fredholm. Consequently, the regularizability of a problem of oblique derivative type boundary value problem for the elliptic systems under consideration is not related to the homotopy class of the system.

Ke ywords: *elliptic system, regularizable boundary value problem, Lopatinski condition, homotopic classification.*

Введение

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, границей которой является гладкая кривая Ляпунова $\partial\Omega$, рассмотрим множество равномерно эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\sum_{j,k=1}^{2} A_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{2} A_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + A_0(x)u = 0, \tag{1}$$

где $A_{jk}(x)$, $A_j(x)$ и $A_0(x)$ – заданные в Ω достаточно гладкие квадратные вещественные матрицы-функции второго порядка, $u : \Omega \to \mathbf{R}^2$ – искомая вектор-функция.

В работе [1] Б. В. Боярский установил, что множество эллиптических систем двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем имеет три компоненты гомотопической связности. Системы первой компоненты гомотопны паре уравнений Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ \Delta u_2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Системы второй компоненты гомотопны системе А. В. Бицадзе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ 2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

третьей компоненты – сопряженной системе А. В. Бицадзе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \\ -2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Задача отыскания пары функций

$$u(x_1,x_2) = (u_1(x_1,x_2),\ u_2(x_1,x_2))^T \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

удовлетворяющей в области Ω системе (1) и на поверхности $\partial\Omega$ граничным условиям

$$p_k\langle l_1; \operatorname{grad} u_1 \rangle + q_k \langle l_2; \operatorname{grad} u_2 \rangle = f_k,\ k = 1,2, \tag{5}$$

называется задачей типа наклонной производной. Здесь $p_k, q_k, f_k : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ – заданные функции класса $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$; l_1, l_2 – заданные некасательные к поверхности $\partial\Omega$ векторные поля; $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^2$; $C^{n,\alpha}(\Omega)$ – множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка n включительно, частные производные порядка n которых непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0;1]$ в этой области; $C^{n,\alpha}(\overline{\Omega})$ – множество всех непрерывно дифференцируемых в области Ω функций до порядка n включительно, все частные производные которых до порядка n включительно допускают непрерывное продолжение на замыкание области и продолжения всех производных непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0;1]$ в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω.

Для произвольной эллиптической системы (1) краевая задача типа наклонной производной, вообще говоря, не является нетеровой. Например, в случае $l_1 = l_2$ задача не будет нетеровой [2] для системы (3).

Известно, что если (1) является системой ортогонального типа и в каждой точке границы $\partial\Omega$ векторы l_1 и l_2 не параллельны, то задача (1), (5) при $p_1 = q_2 = 1$ и $p_2 = q_1 = 0$ является нетеровой независимо от того, какой компоненте гомотопической связности принадлежит система (1) [3, с. 74].

В настоящей статье для каждой компоненты гомотопической связности множества эллиптических систем вида (1) приводится представитель, для которого задача типа наклонной производной не является нетеровой. Тем самым мы показываем, что регуляризуемость задачи типа наклонной производной для рассматриваемых эллиптических систем не связана с гомотопическим типом системы, и пополняем количество подобных примеров [4].

Проблема гомотопической классификации регуляризуемых краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений впервые была сформулирована И. М. Гельфандом в 1960 г. Она состоит в нахождении числа компонент гомотопической связности, в указании представителей этих компонент и в установлении гомотопических инвариантов эллиптических псевдодифференциальных операторов, задаваемых регуляризуемыми краевыми задачами [5].

Несмотря на давность постановки, эта проблема до сих пор не решена, по ней имеются лишь отдельные результаты. Например, проведена гомотопическая классификация регуляризуемых задач Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодереску [6], для трехмерных аналогов системы Коши – Римана [7], для кососимметрических эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ [8] и для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ [9]. Также известны классы систем, для которых в произвольной области любые граничные условия не могут образовывать регуляризуемую краевую задачу [10–12].

Примеры эллиптических систем и некоторые их свойства

Рассмотрим следующие три системы двух дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 4\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2{}^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2{}^2} = 0, \\ 2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1{}^2} + 3\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 3\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2{}^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1{}^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2{}^2} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} 4\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - 9\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 3\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \dfrac{17}{2}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - 7\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = 0, \\ 2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - 4\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - 4\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - 4\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{15}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\dfrac{7}{5}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}-\dfrac{1}{15}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}-5\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}-3\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}=0, \\ \dfrac{1}{5}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}-\dfrac{6}{5}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}+6\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}+3\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}=0. \end{cases} \tag{8}$$

Характеристические матрицы систем (7), (8) и (9) имеют соответственно вид

$$A(\xi)=\begin{pmatrix} \xi_1^2-\xi_1\xi_2+4\xi_2^2 & \xi_2^2 \\ 2\xi_1^2+3\xi_1\xi_2+3\xi_2^2 & \xi_1^2+\xi_1\xi_2+\xi_2^2 \end{pmatrix},$$

$$B(\xi)=\begin{pmatrix} 4\xi_1^2-9\xi_1\xi_2-3\xi_2^2 & -\dfrac{17}{2}\xi_1^2-7\xi_1\xi_2+\dfrac{1}{2}\xi_2^2 \\ 2\xi_1^2-4\xi_1\xi_2-2\xi_2^2 & -4\xi_1^2-4\xi_1\xi_2 \end{pmatrix},$$

$$C(\xi)=\begin{pmatrix} -\dfrac{4\xi_1^2}{15}+\dfrac{7\xi_1\xi_2}{5}-\dfrac{\xi_2^2}{15} & -5\xi_1^2-3\xi_1\xi_2+\xi_2^2 \\ \dfrac{\xi_1^2}{5}+\dfrac{\xi_1\xi_2}{5}-\dfrac{6\xi_2^2}{5} & 6\xi_1\xi_2+3\xi_2^2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Каждая из систем* $A\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u=0$, $B\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u=0$, $C\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ *является эллиптической. Система* $A\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ *гомотопна паре уравнений Лапласа* (2), *система* $B\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ *гомотопна системе А. В. Бицадзе* (3), *а система* $C\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ *гомотопна сопряженной системе А. В. Бицадзе* (4).

Доказательство. Поскольку

$$\det A(\xi)=\det B(\xi)=\det C(\xi)=(\xi_1^2+\xi_2^2)^2>0$$

при всех $\xi\in\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$, то, по определению, каждая из рассматриваемых систем является эллиптической.

В работе [1] по коэффициентам эллиптической системы (1) строится специальная квадратичная функция $p(\lambda)$, по расположению корней которой на комплексной плоскости можно определить принадлежность системы (1) той или иной компоненте гомотопической связности. Для системы $A\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ эта квадратичная функция имеет вид

$$p_A(\lambda)=\lambda^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}i\right)\lambda+\left(\frac{7}{4}+\frac{3}{4}i\right),$$

и ее корни $\lambda_1=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{4}i$, $\lambda_2=-i$ имеют мнимые части разных знаков, и, согласно [1], система (6) гомотопна паре уравнений Лапласа (2).

Для системы $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ соответствующая квадратичная функция имеет вид

$$p_B(\lambda)=\lambda^2+\left(\frac{2}{7}-\frac{26}{21}i\right)\lambda+\left(-\frac{5}{21}-\frac{2}{7}i\right),$$

корни которой $\lambda_1=-\frac{2}{7}+\frac{5}{21}i$, $\lambda_2=i$ имеют положительные мнимые части, и, согласно [1], система (7) гомотопна системе А. В. Бицадзе (3).

Для системы $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ соответствующая квадратичная функция имеет вид

$$p_C(\lambda)=\lambda^2+\left(\frac{33}{61}+\frac{177}{122}i\right)\lambda+\left(-\frac{55}{122}+\frac{33}{61}i\right),$$

корни которой $\lambda_1=-\frac{33}{61}-\frac{55}{122}i$, $\lambda_2=-i$ имеют отрицательные мнимые части, согласно [1], система (8) гомотопна системе, сопряженной системе А. В. Бицадзе (4).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Каждая компонента произвольного решения любой из систем* $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$, $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$, $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$ *в области* $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ *удовлетворяет уравнению* $\Delta^2 v=0$, *где* $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ *– оператор Лапласа на плоскости.*

Доказательство. Согласно результатам книги [10, с. 141], из эллиптичности рассматриваемых систем следует, что каждая компонента $u_k\,(k=1,2)$ произвольного решения u любой из них является функцией класса $C^\infty(\Omega)$. Тогда из равенств

$$\begin{pmatrix}\Delta^2u_1\\ \Delta^2u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\\ -2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-3\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+4\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\end{pmatrix}A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\Delta^2u_1\\ \Delta^2u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-4\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{17}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+7\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\\ -2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+4\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 4\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-9\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-3\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\end{pmatrix}B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\Delta^2u_1\\ \Delta^2u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+3\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 5\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\\ -\frac{1}{5}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\frac{1}{5}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{6}{5}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -\frac{4}{15}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{7}{5}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{1}{15}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\end{pmatrix}C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$$

следует требуемое.

Задача типа наклонной производной для рассматриваемых систем

В этом разделе считаем, что граничные условия (5) имеют вид

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial l}\right|_{\partial\Omega} = f_1, \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = f_2, \tag{9}$$

где ν – единичное поле внутренних нормалей на поверхности $\partial\Omega$; l – единичное поле на $\partial\Omega$, составляющее с нормалью ν ориентированный угол 45° в каждой точке $\partial\Omega$; $f_1, f_2 : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции.

Теорема 3. *Для каждой из систем* $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0,\ B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0,\ C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$ *задача с граничными условиями* (11) *не является нетеровой.*

Доказательство. Достаточно показать невыполненность условия Я. Б. Лопатинского, обеспечивающего нетеровость краевой задачи, как в классических пространствах, так и в широком классе гильбертовых пространств [14]. Это условие известно как условие регуляризуемости краевой задачи и представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора (9). Для задачи (1), (5) условие регуляризуемости состоит в том, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом векторе τ, касательном к $\partial\Omega$ в точке y, ранг матрицы Я. Б. Лопатинского

$$L(y,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \Xi(y, \lambda\nu + \tau)\Theta^{-1}(y, \lambda\nu + \tau)(E, \lambda E)d\lambda, \tag{10}$$

является максимальным, т. е. равен двум. Здесь $\Theta(y,\xi)$ – характеристическая матрица системы (1); Ξ – символ старшей части граничного оператора (5); E – единичная матрица размера 2×2; ν – внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке y; Γ – простой замкнутый контур, лежащий в верхней λ-полуплоскости и охватывающий находящиеся там λ-корни уравнения

$$\det\Theta(y, \lambda\nu + \tau) = 0. \tag{11}$$

Поскольку в каждой точке $y \in \partial\Omega$

$$\det A(\lambda\nu + \tau) = \det B(\lambda\nu + \tau) = \det C(\lambda\nu + \tau) = (\lambda^2 + 1)^2,$$

то уравнение (11) для каждой из рассматриваемых систем имеет корни $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$ кратности 2. Пусть простой замкнутый контур Γ, лежащий в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, охватывает точку $\lambda_1 = i$. В той точке $\tilde{y}$ поверхности $\partial\Omega$, в которой внутренняя нормаль $\nu = (-1; 0)$, на векторе $\tau = (0; 1)$ матрица Лопатинского (10) задачи с граничными условиями (9) для системы $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$, имеет вид

$$L_A(\tilde{y},\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{1}{(\lambda^2+1)^2}\begin{pmatrix} \lambda+\gamma & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda+1 & -1 \\ -2\lambda^2+3\lambda-3 & \lambda^2+\lambda+4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}d\lambda,$$

для системы $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0$

где

$$L_B(\tilde{y},\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(\lambda^2+1)^2}\begin{pmatrix}\lambda+\gamma & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\lambda^2+4\lambda & \frac{17}{2}\lambda^2-7\lambda-\frac{1}{2}\\ -2\lambda^2-4\lambda+2 & 4\lambda^2+9\lambda-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & 0 & \lambda\end{pmatrix}d\lambda$$

и для системы $C\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$

$$L_C(\tilde{y},\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(\lambda^2+1)^2}\begin{pmatrix}\lambda+\gamma & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\lambda+3 & 5\lambda^2-3\lambda-1\\ -\frac{1}{5}\lambda^2+\frac{1}{5}\lambda+\frac{6}{5} & -\frac{4}{15}\lambda^2-\frac{7}{5}\lambda-\frac{1}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 1 & 0 & \lambda\end{pmatrix}d\lambda,$$

где $\gamma=\frac{\langle l,\tau\rangle}{\langle l,\nu\rangle}=1$. Вычислив записанные выше интегралы с помощью основной теоремы о вычетах, получим, что

$$L_A(\tilde{y},\tau)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2-i & i & 3i & i\\ -4-3i & 2-i & 6-3i & 2-i\end{pmatrix},$$

$$L_B(\tilde{y},\tau)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-8 & 17-i & -16i & 3+33i\\ -4+4i & 8-9i & -8-8i & 18+15i\end{pmatrix},$$

$$L_C(\tilde{y},\tau)=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}45i & 150-15i & -180+45i & 60+285i\\ -6-3i & -8+21i & 6-27i & -42-11i\end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться в том, что все миноры второго порядка матриц $L_A(\tilde{y},\tau)$, $L_B(\tilde{y},\tau)$ и $L_C(\tilde{y},\tau)$ равны нулю. Таким образом, в точке $\tilde{y}\in\partial\Omega$ нарушается условие Лопатинского, и, следовательно, задача типа наклонной производной (с краевыми условиями (9)) для каждой из рассматриваемых систем (6), (7) и (8) не является регуляризуемой.

Теорема доказана.

Заключение

Таким образом, в каждой компоненте гомотопической связности множества эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости с положительным характеристическим определителем найдется система, обладающая следующими свойствами:

1) все дважды непрерывно дифференцируемые решения этой системы являются бигармоническими вектор-функциями;

2) краевая задача типа наклонной производной в произвольной ограниченной области с гладкой границей на плоскости не является регуляризуемой.

Последнее означает, что оператор, отвечающий рассматриваемой задаче, не является нетеровским в определенных банаховых пространствах, т. е. имеет либо незамкнутое множество значений, либо бесконечномерное ядро или коядро.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боярский, Б. В. О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости / Б. В. Боярский // Bull. del'Acad. Pol. des Sciences. Ser. des Sciences Math., Astron. et Phys. – 1959. – Vol. 7, nr 9. – P. 565–570.

2. Жадан, М. И. Задача типа наклонной производной для эллиптических систем второго порядка / М. И. Жадан, А. Т. Усс // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 6. – С. 489–491.

3. Жадан, М. И. Гомотопическая классификация и регуляризуемость некоторых классов эллиптических систем и краевых задач : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02 / М. И. Жадан ; Ин-т математики АН БССР. – Минск, 1983. – 111 л.

4. Басик, А. И. К вопросу регуляризуемости краевой задачи типа наклонной производной для эллиптических систем второго порядка на плоскости [Электронный ресурс] / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. В. Копайцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 3 (52). – С. 67–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_67. – EDN: GFUZYC

5. Гельфанд, И. М. Об эллиптических уравнениях / И. М. Гельфанд // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. 15, вып. 3. – С. 121–132.

6. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация задач Римана – Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Математическая физика : респ. межвед. сб. – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.

7. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

8. Басик, А. И. Гомотопическая классификация регуляризуемых краевых задач Римана – Гильберта для одного класса эллиптических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, Е. В. Грицук // Математика. Інформаційні технології. Освіта : зб. ст. – Луцьк, 2019. – № 6. – С. 12–18.

9. Басик, А. И. Задача Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ [Электронный ресурс] / А. И. Басик, Е. В. Грицук, Т. А. Грицук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 7–16. – Режим доступа: https://doi.org/10.29235/ 1561-2430-2020-56-1-7-16.

10. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация четырехмерных аналогов системы Коши – Римана с действительными коэффициентами / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 5–9.

11. Басик, А. И. О краевых задачах для систем Янушаускаса / А. И. Басик, А. Т. Усс // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 10. – С. 26–28.

12. Басик, А. И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических сис-тем первого порядка в $\mathbf{R}^4$ / А. И. Басик, А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.

13. Хермандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. – М. : Мир, 1965. – 379 с.

14. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

REFERENCES

1. Bojarskij, B. V. O piervoj krajevoj zadachie dlia sistiem uravnienij elliptichieskogo tipa vtorogo poriadka na ploskosti / B. V. Bojarskij // Bull. del'Acad. Pol. des Sciences. Ser. des Sciences Math., Astron. et Phys. – 1959. – Vol. 7, nr 9. – P. 565–570.

2. Zhadan, M. I. Zadacha tipa naklonnoj proizvodnoj dlia elliptichieskikh sistiem vtorogo poriadka / M. I. Zhdan, A. T. Uss // Dokl. AN BSSR. – 1983. – T. 27, № 6. – S. 489–491.

3. Zhadan, M. I. Gomotopichieskaja klassifikacija i rieguliarizujemost' niekotorykh klassov elliptichieskikh sistiem i krajevykh zadach : dis. ... kand. fiz.-mat. nauk : 01.01.02 / M. I. Zhadan ; In-t matiematiki AN BSSR – Minsk, 1983. – 111 l.

4. Basik, A. I. K voprosu rieguliarizujemosti krajevoj zadachi tipa naklonnoj proizvodnoj dlia elliptichieskih sistiem vtorogo poriadka na ploskosti [Eliektronnyj riesurs] / A. I. Basik, Ye. V. Gricuk, T. V. Kopajceva // Probliemy fiziki, matiematiki i tiekhniki. – 2022. – № 3 (52). – S. 67–71. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_3_52_67. – EDN: GFUZYC

5. Giel'fand, I. M. O elliptichieskikh uravnienijakh / I. M. Giel'fand // Uspiekhi mat. nauk. – 1960. – T. 15, vyp. 3. – S. 121–132.

6. Shevchienko, V. I. Gomotopichieskaja klassifikacija zadach Rimana – Gil'berta dlia golomorfnogo viektora / V. I. Shevchienko // Matiematichieskaja fizika : riesp. miezhved. sb. – Kijev, 1975. – Vyp. 17. – S. 184–186.

7. Uss, A. T. Krajevaja zadacha Rimana – Gil'berta dlia triokhmiernykh analogov sistiemy Koshi – Rimana // Dokl. NAN Belarusi. – 2003. T. 47, № 6. – S. 10–15.

8. Basik, A. I. Gomotipichieskaja klassifikacija rieguliarizujemykh krajevykh zadach Rimana – Gil'berta dlia odnogo klassa elliptichieskikh sistiem v $\mathbf{R}^3$ / A. I. Basik, Ye. V. Gricyk // Matematyka. Informacijni tekhnolohiji. Osvita : zb. st. – Luc'k, 2019. – № 6. – S. 12–18.

9. Basik, A. I. Zadacha Rimana – Gil'berta dlia elliptichieskikh sistiem ortogonal'nogo tipa v $\mathbf{R}^3$ [Eliektronnyj riesurs] / A. I. Basik, Ye. V. Gricuk, T. A. Gricuk // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2020. T. 56, № 1. – S. 7–16. – Riezhim dostupa: https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-4-7-16.

10. Uss, A. T. Gomotopicheskaja klassifikacija chietyriokhmiernykh analogov sistiemy Koshi – Rimana s dejstvitiel'nymi koefficijentami / A. T. Uss // Dokl. NAN Bielarusi. – 2003. – T. 47, № 4. – S. 5–9.

11. Basik A. I. O krajevykh zadachakh sistiem Janushauskasa / A. I. Basik, A. T. Uss // Tr. In-ta matiematiki NAN Bielarusi. – 2002. – T. 10. – S. 26–28.

12. Basik, A. I. O krajevykh zadachakh dlia elliptichieskikh psievdosimmitrichieskikh sistiem piervogo poriadka v $\mathbf{R}^4$ / A. I. Basik, A. T. Uss // Diffierienc. uravnienija. – 2003. – T. 38, № 3. – S. 410–412.

13. Khiermander, L. Liniejnyje diffieriencial'nyje opieratory s chastnyimi proizvodnymi / L. Khiermander. – M. : Mir, 1965. – 379 s.

14. Agranovich, M. S. Elliptichieskije singuliarnyje integro-diffieriencial'nyje operatory / M. S. Agranovich // Uspiekhi mat. nauk. – 1965. – T. 20, vyp. 5. – S. 1–121.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.05.2023