УДК 539.3

К ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ

В.М. Хвисевич, А.И. Веремейчик

Брестский государственный технический университет, г. Брест, Беларусь, E-mail: vai_mrtm@tut.by

Разработан алгоритм решения плоской нестационарной задачи несвязанной классической термоупругости с помощью метода граничных интегральных уравнений. Интегральные уравнения заменяются их дискретными аналогами – системой алгебраических уравнений. Рассмотрены особенности численной реализации интегральных уравнений.

TO NUMERICAL REALIZATION OF INTEGRABLE EQUATIONS NON-STEADY PROBLEMS OF THERMOELASTICITY

V.M.Khvisevich, A.I.Veramejchik

The algorithm of a solution of a flat non-steady problem of disconnected classic thermoelasticity with the help of a method of boundary integrable equations is designed. The integrable equations are substituted by their discretic analogs - system of algebraic equations. The features of numerical realization of integrable equations are review.

Введение

Решение краевых и начально-краевых задач термоупругости для любых конструктивных элементов и граничных условий возможно только численным путем. Наиболее оптимальным методом является метод граничных интегральных уравнений (ГИУ), или граничных элементов [1]. Метод ГИУ – метод решения, основанный на сочетании идей теории потенциала и методов теории аппроксимации. Метод ГИУ характеризуется как один из наиболее перспективных методов анализа показателей напряженно-деформированного состояния применительно к широкому классу практических задач строительной механики, теории упругости и термоупругости. Сущность методов потенциала – в преобразовании дифференциальных уравнений в эквивалентную систему интегральных уравнений. Это позволяет получить систему уравнений, включающую только значения переменных на границе области. С помощью соответствующих формул представления определяются значения неизвестных величин во внутренних точках области через их граничные значения и значения их первых производных. Кроме того, такой подход уменьшает размерность исходной задачи на единицу. Метод ГИУ позволяет решать краевые задачи в областях произвольной конфигурации, в т.ч. и бесконечной, имеет меньше затрат памяти и времени вычислительных операций по сравнению с методом конечных элементов, позволяет легко комбинировать этот метод с другими численными методами. Особенно эффективно его применение при решении термоупругих задач в случае нестационарных температурных воздействий.

Методика решения

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений нестационарных краевых задач классической несвязанной термоупругости [1] для изотропных материалов:

$$\mu \; u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T_{,i} - X_i \,, \tag{1}$$

$$T_{,kk} - \frac{1}{a}\dot{T} = -\frac{q}{a}, \tag{2}$$

где: λ и μ - коэффициенты Ламе, α_T - коэффициент линейного теплового расширения, a - коэффициент температуропроводности, $X_i(x,t)$ - массовые нагрузки, q - источник тепла - количество тепла, возникающее в единицу времени в единице объема.

С помощью метода граничных интегральных уравнений осуществляется переход от дифференциальных уравнений к интегральным. Для различного рода краевых задач и начально-краевых задач построены ГИУ нестационарных задач термоупругости [1]. Численная реализация интегральных уравнений производится с помощью метода механических квадратур. Рассмотрим основные особенности этого метода в случае нестационарных задач, т.е. в случае, когда температура изменяется с течением времени.

Замена интегралов конечной суммой осуществляется путем разбиения границы области (плоская кривая с кусочно-непрерывной кривизной) на отрезки Δl_i с центрами P_i. Потребуем, чтобы интегральные уравнения удовлетворялись только в точках P_i. Тогда вместо интегрального уравнения получим систему равенств:

$$\Delta T_m(P_k,t) = V(P_k,t) + V^\circ(P_k,t) - \int_0^t \int_{L} [Q_*(P_k,P,t-\tau)T(P,\tau) - T_*(P_k,P,t-\tau)Q(P,\tau)]\,dL_s\,d\tau. \quad (3)$$

Для определения граничных значений температуры разобьем интеграл по всей границе на сумму интегралов по отрезкам Δl_i:

$$\Delta T_m(P_k,t) = V(P_k,t) + V^\circ(P_k,t) - \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta l_i} Q_*(P_k,P,t-\tau)T(P,\tau) - T_*(P_k,P,t-\tau)Q(P,\tau)\big]\,dl\,d\tau. \quad (4)$$

Для получения алгебраической системы линейных уравнений для неизвестных $Q(P_k)$ представим сумму (4) в виде:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta l_i} Q_*(P_k,P,t-\tau)T(P,\tau) - T^*(P_k,P,t-\tau)Q(P,\tau)\big]\,dl = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[T(P,\tau)\sum_{j=1}^{m} Q_*(P_k,P,t-\tau) - Q(p,\tau)\sum_{j=1}^{m} T^*(P_k,P,t-\tau)\right] - R, \end{aligned} \quad (5)$$

где R – погрешность замены, которая должна быть как можно меньше при заданном разбиении границы.

При переходе от (4) к (5) используются следующие допущения:

а) плотности T, Q в пределах отрезка считаются непостоянными. Их значения в текущей точке отрезка интегрирования выражаются через неизвестные значения в центре этого отрезка и значения в некоторых соседних точках P_i.

Проводим интерполяционный полином Лагранжа через $T(x_i)$ и $Q(x_i)$; $i = 1,2,\ldots,m$. Например, для $Q(x_i)$ имеем:

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{m} v(x_i)\frac{\omega_m(x)}{(x-x_i)\omega_m^{'}(x_i)} + \frac{Q^{m+1}(\xi)}{(m+1)!}\omega_m(\xi), \quad (6)$$

где $\omega_m(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m)$, x – длина дуги контура.

Важным обстоятельством является тот факт, что значения $Q(x_i)$ входят в интерполяционную формулу линейно. После подстановки $Q(x)$ в интеграл по отрезку Δl из под знака интеграла выносится $Q(x_i)$ и оставшаяся часть вычисляется по квадратурным формулам для сингулярных интегралов (точка P_k совпадает с центром отрезка интегрирования).

Применение интерполяционного полинома для плотностей при замене интегралов конечной суммой приводит к линейной системе алгебраических уравнений для определения неизвестных плотностей $Q(x_k)$;

б) контур областей со сложной границей задается аналитически, т.е. в качестве 1-го более точного приближения границы, по сравнению с отрезками прямых, применяются отрезок дуги окружности, проходящей через две соседние точки разбиения и имеющий средний радиус кривизны контура на этом участке. Для большого количества прикладных задач, в которых область ограничена дугами окружностей и прямыми, такое представление контура является точным;

в) при вычислении сингулярных интегралов под знаком интегралов находится известная функция, интегрируемая в смысле главного значения Коши и сам сингулярный интеграл не равен нулю. Для вычисления сингулярных интегралов применяются квадратурные формулы [3].

Вычисление, например, сингулярного интеграла типа $I = \int_{-h}^{h}\frac{f(x)}{x}dx$, к которому приводятся интегральные уравнения нестационарной термоупругости, осуществляется по формуле:

$$I = \int_{-h}^{h}\frac{f(x)}{x}dx = h\sum_{k=1}^{n}\omega_k\frac{f(x_k)}{x_k} + R_c \quad (7)$$

где ω_k - веса квадратурной формулы Гаусса R_c - остаточный член. Сравнивая (7) и формулу Гаусса [3], можно сделать вывод, что квадратурная формула для сингулярного интеграла при четном n отличается от формулы Гаусса только остаточным членом.

Таким образом, решение задачи теплопроводности состоит из 3-х основных этапов:

1.замена интегральных уравнений системой алгебраических уравнений – системой дискретных аналогов интегральных уравнений:

2.решение алгебраической системы;

3. вычисление по полученным значениям плотностей в центрах отрезков разбиения контура добавок температурных перемещений и напряжений в граничных и внутренних точках.

Первый и третий этапы основаны на вычислении контурных сингулярных интегралов (при фиксированном шаге времени) типа

$$I(P_k) = \int_L Q(P)T^*(P_k, P, t-\tau)\,dl\,. \tag{8}$$

Применяя к вычислению интегралов формулу (7), получим:

$$I_i = \int_{\Delta l_i} Q(P)T^*(P_k, P, t-\tau)\,dl = h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j Q(x_j) T^*(P_k, P_{ij}, t-\tau) + R_i\,, \tag{9}$$

где R_i - остаточный член.

Остатки R_i, $i \neq k$ содержат множители $\dfrac{(h_i)^{2n-1}}{135}$, остаток $R_k = \dfrac{(h_k)^{2m+1}}{675}$.

Точка P_{ij} лежит внутри i-го отрезка, значения $T^*(P_k, P_{ij}, t-\tau)$ известны, для вычисления $Q(x_j)$ применим формулу:

$$Q(x_j) = \sum_{t=0}^{p} Q(x_t) A(x_t, x_j) + \omega_p(x_j) \frac{Q^{(P+1)}(\xi_j)}{(p+1)!}; \tag{10}$$

где x_t - координаты точек, через которые проводится интерполяционный полином, $Q(x_t) = Q^t$ - значения плотностей в этих точках, $A(x_t, x_j) = A_j^t = \dfrac{\omega_p(x_j)}{(x_j - x_t)\omega_p'(x_t)}$, - матрица, элементы которой нетрудно вычислить.

Внося (10) в (9) получим два варианта формулы для вычисления интеграла по отрезку Δl_i :

$$I_i = h_i \sum_{t=0}^{p} Q^t \sum_{j=1}^{m} \omega_j A_j^t T_j^* + R_i' + R_i; \tag{11}$$

$$I_i = h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j T_j^* \sum_{t=0}^{p} Q^t A_j^t + R_i' + R_i; \tag{12}$$

где $R_i' = h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j T_j^* + \omega_p(x_j) \dfrac{Q^{(p+1)}(\xi_i)}{(p+1)!}$.

Формула (11) применяется на 1-м этапе решения.

Формула (12) используется на 3-м этапе вычислений, когда плотности потенциалов Q^t в точках, через которые проходит интерполяционный полином, известны. Предварительно находятся $\sum_{t=0}^{p} Q^t A_j^t$ - значения плотности в узловых точках x_j, а затем производится суммирование по j. Величина $h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j A_j^t T_j^*$ в (12) является добавкой в матрицу коэффициентов влияния плотности в точках x_t .

С помощью такого алгоритма вычисляются все интегралы в уравнениях краевых задач теплопроводности и термоупругости с учетом временных шагов, т.е. в случае рассмотрения нестационарных термоупругих задач.

Численное решение краевой задачи нестационарной термоупругости делится на два основных этапа:
1. решение краевой задачи теплопроводности (2) и вычисление температурных добавок перемещений и напряжений в контурных и внутренних точках области на временных отрезках по методике, рассмотренной выше;
2. реализация сингулярных интегральных уравнений теории упругости, в которых присутствует фиктивная поверхностная температурная нагрузка.

Алгоритм решения второго этапа подробно рассмотрен в [4].

Заключение

С помощью метода граничных элементов разработан алгоритм численного решения задачи нестационарной термоупругости. Эффективность алгоритма доказана проведенным решением тестовых задач.

Библиографический список

1. **Рицц о Ф.** Метод граничных интегральных уравнений - современный вычислительный метод прикладной механики. // Метод граничных интегральных уравнений. - М.: Мир, 1978. - с.11-17.

2. **Веремейчик А.И.** Граничные интегральные уравнения двухмерных нестационарных краевых задач несвязанной термоупругости. / Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Мн.: УП «Технопринт», 2001. – С. 99-102.

3. **Демидович Б.П., Марон И.А.** Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1966. - 664 с.

4. **Новацкий В.** Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 256 с.