СЕКЦИЯ 3. ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УДК 517.954

А. И. БАСИК, Е. В. ГРИЦУК, Т. А. ГРИЦУК
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ МНОЖЕСТВА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНОГО ТИПА В $\mathbf{R}^3$

Пусть в области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ задана эллиптическая система четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\sum_{j=1}^{3} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

где A_j – постоянные действительные матрицы размера 4×4, $U : \Omega \to \mathbf{R}^4$ – искомая вектор-функция. Относительно системы (1) будем предполагать, что ее характеристическая матрица имеет вид

$$A(\xi) = \sum_{j=1}^{3} A_j \xi_j = \begin{pmatrix} \langle a;\xi\rangle & \langle b;\xi\rangle & \langle c;\xi\rangle & \langle d;\xi\rangle \\ -\langle b;\xi\rangle & \langle a;\xi\rangle & -\langle d;\xi\rangle & \langle c;\xi\rangle \\ -\langle c;\xi\rangle & \langle d;\xi\rangle & \langle a;\xi\rangle & -\langle b;\xi\rangle \\ -\langle d;\xi\rangle & -\langle c;\xi\rangle & \langle b;\xi\rangle & \langle a;\xi\rangle \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $a, b, c, d \in \mathbf{R}^3$ – заданные векторы, $\langle x;y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$. Системы (1), характеристическая матрица которых имеет вид (2), назовем системами ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$.

Лемма 1. *Система дифференциальных уравнений* (1), (2) *является эллиптической тогда и только тогда, когда система векторов* $\{a,b,c,d\}$ *содержит три линейно независимых.*

Доказательство. Заметим, что

$$\det A(\xi) = \left(\langle a,\xi\rangle^2 + \langle b,\xi\rangle^2 + \langle c,\xi\rangle^2 + \langle d,\xi\rangle^2\right)^2.$$

Пусть система (1), (2) является эллиптической. Это означает, что при каждом ненулевом векторе $\xi \in \mathbf{R}^3$ выполняется неравенство $\det A(\xi) > 0$. Последнее равносильно тому, что система линейных уравнений (относительно переменных ξ_1, ξ_2 и ξ_3)

$$\begin{cases} a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = 0, \\ b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3 = 0, \\ c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3 = 0, \\ d_1\xi_1 + d_2\xi_2 + d_3\xi_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

имеет только нулевое решение. Следовательно, ранг матрицы системы (3) равен трем, откуда вытекает существование трех линейно независимых векторов из системы a, b, c и d.

Пусть некоторые три вектора из системы векторов $\{a, b, c, d\}$ являются линейно независимыми. Тогда ранг матрицы системы линейных алгебраических уравнений (3) равен трем, и, следовательно, система (3) имеет только нулевое решение. Отсюда следует эллиптичность системы дифференциальных уравнений (1), (2), что и требовалось доказать.

В настоящей работе доказывается гомотопическая связность множества эллиптических систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$. Две системы вида (1), (2) назовем гомотопными, если существует непрерывная деформация одной системы в другую в классе систем ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$, не нарушающая условия эллиптичности. Проблема гомотопической классификации множества эллиптических систем дифференциальных уравнений с частными производными была сформулирована в совместном докладе И. М. Гельфанда, И. Г. Петровского и Г. Е. Шилова [1] на III Всесоюзном математическом съезде в 1956 г. и заключается в определении числа компонент связности, указании представителей этих компонент и установлении гомотопических инвариантов.

Теорема 2. *Произвольная эллиптическая система* (1), (2) *ортогонального типа в* $\mathbf{R}^3$ *гомотопна системе Моисила – Теодореску.*

Доказательство. Покажем, что произвольная система ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ гомотопна системе вида (1), (2), у которой вектора b, c, d образуют правую тройку. Согласно лемме 1, три вектора из системы $\{a, b, c, d\}$ линейно независимы. Рассмотрим случай линейной независимости векторов a, b, c. Положим $d_t = t \cdot a + (1-t) \cdot d$, если a, b, c – правая тройка векторов и $d_t = -t \cdot a + (1-t) \cdot d$, если a, b, c – левая тройка векторов. Тогда семейство систем, характеристическая матрица которых имеет вид

$$A_t(\xi)=\begin{pmatrix} \langle a;\xi\rangle & \langle b;\xi\rangle & \langle c;\xi\rangle & \langle d_t;\xi\rangle \\ -\langle b;\xi\rangle & \langle a;\xi\rangle & -\langle d_t;\xi\rangle & \langle c;\xi\rangle \\ -\langle c;\xi\rangle & \langle d_t;\xi\rangle & \langle a;\xi\rangle & -\langle b;\xi\rangle \\ -\langle d_t;\xi\rangle & -\langle c;\xi\rangle & \langle b;\xi\rangle & \langle a;\xi\rangle \end{pmatrix} \quad (t\in[0;1]),$$

осуществляет указанную гомотопию. Случаи линейной независимости троек $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$ и $\{b,c,d\}$ разбираются аналогично.

Далее, правая тройка векторов b, c, d непрерывной деформацией в $\mathbf{R}^3$ с сохранением условия линейной независимости может быть сгомотопирована в стандартный базис e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbf{R}^3$ (см., например, [2, с. 211]), а вектор a – в нулевой. Таким образом, произвольная эллиптическая система ортогонального типа в $\mathbf{R}^3$ гомотопна системе, характеристическая матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 & 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. системе Моисила – Теодореску [3]. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд, И. М. Теория систем дифференциальных уравнений с частными производными / И. М. Гельфанд, И. Г. Петровский, Г. Е. Шилов // Труды Третьего Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь – июль 1956 г. : в 3 т. / АН СССР. – М., 1958. – Т. 3 : Обзорные доклады / редкол.: А. А. Абрамов [и др.]. – С. 65–72.

2. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры / П. С. Александров ; с прил. собр. задач, снабж. решениями, сост. А. С. Пархоменко. – М. : Наука, 1968. – 911 с.

3. Бицадзе, А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А. В. Бицадзе. – М. : Наука, 1966. – 203 с.