ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГИУ В РАСЧЕТАХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ И ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПОВЕРХНОСТНОМ ПЛАЗМЕННОМ УПРОЧНЕНИИ

Веремейчик А. И., Хвисевич В. М.

Брестский государственный технический университет, г. Брест, Беларусь
vai_mrtm@bstu.by

В любом процессе термообработки конструктивных элементов машин и механизмов важнейшим фактором является исследование распространения полей температур и термонапряжений [1, 2]. Для вычисления температурных полей и термонапряжений необходимо решить задачи теплопроводности и термоупругости при соответствующих краевых условиях. Для решения этих уравнений задаются параметры процесса упрочнения: скорость перемещения источника V, плотность теплового потока q, размеры анодного пятна и др., а также граничные и начальные условия задач теплопроводности и термоупругости.

Решение задачи термоупругости проводится в 2 этапа. На первом этапе решается задача теплопроводности по определению температурных полей. Для реализации задачи теплопроводности в случае движущегося источника нагрева нами был предложен следующий подход. При плазменной обработке поверхности тепловая нагрузка на обрабатываемую деталь передается ограниченной площадке. Если струя ориентирована перпендикулярно поверхности, то на ней образуется участок оплавленного материала, размеры которого можно измерить. Поскольку при этом получение оплавленной зоны не является целью данного процесса, а плазмотрон непрерывно перемещается вдоль детали с заданной скоростью, то можно в первом приближении считать, что в пятне нагружения на поверхности достигается температура, равная температуре плавления материала и дальнейшего разогрева этого уже жидкого металла не происходит. В этом случае фазовые превращения можно считать отсутствующими и для определения температурного поля обрабатываемой детали можно применить классические уравнения теплопроводности твердого тела с граничными условиями первого рода [3].

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

где t – время, $T = T(t,x,y,z)$ – искомая температура, a – коэффициент температуропроводности материала, x,y,z – координаты расчетной точки тела.

В качестве математического аппарата для решения поставленной задачи в данной работе используется метод граничных интегральных уравнений, имеющий ряд преимуществ по сравнению с другими широко распространенными в инженерных расчетах численными методами [4].

Для решения задачи теплопроводности используется метод тепловых потенциалов [5]. Решение разыскивается в виде потенциалов простого или двойного слоя [5], которые вне точек поверхности, по которой проводится интегрирование, являются решениями уравнения теплопроводности.

При задании на поверхности тела граничных условий первого рода $F = F(y,t)$ получено интегральное уравнение для определения плотности теплового потока двойного слоя $\mu(y,\tau)$, что даст возможность найти распределение температуры в любой точке рассматриваемой области L в данный момент времени путем подстановки данной плотности в выражение потенциала двойного слоя:

$$-\frac{1}{2}\mu(x,t)+\frac{4a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\left(\sqrt{2a(t-\tau)}\right)^5}\int_L K(y,x,t-\tau)\mu(y,\tau)dl=F(y,t)\,. \tag{2}$$

Ядро $K(y,x,t-t)=e^{\left(-\frac{r^2}{4a(t-t)}\right)}\left[cI_1(B)-bI_0(B)\right]$ интегрального уравнения представляет собой произведение показательной функции на функцию Бесселя первого рода.

После определения температурного поля на втором этапе определяется соответствующее ему напряженно-деформированное состояние. Необходимо найти решение дифференциальных уравнений равновесия [6]:

$$\Delta u_i+\frac{1}{1-2n}\,\mathrm{graddiv}\,u_i=\frac{2(1+n)}{1-2n}a\ \mathrm{grad}(T-T_0)\,, \tag{3}$$

при соответствующих граничных условиях.

С помощью метода граничных интегральных уравнений дифференциальные уравнения в частных производных заменяются интегральными уравнениями типа Фредгольма 2-го рода, которые удобны для численной реализации. Краевая задача в виде (3) сводится к задаче изотермической теории упругости.

Решение (3) разыскивается в виде, предложенном Гудьером:

$$u_i=u_i^0+u_i^T\,, \tag{4}$$

где u_i^0 – решение однородного дифференциального уравнения, а u_i^T – частное решение уравнения (3), которое разыскивается в виде градиента некоторой бигармонической функции

$$u_i^T=\mathrm{grad}\,W\,. \tag{5}$$

Функция W удовлетворяет уравнению (5) в виде:

$$\Delta W=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T-T_0)\,. \tag{6}$$

Для определения напряжений можно использовать формулу:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^0+\sigma_{ij}^T\,, \tag{7}$$

где σ_{ij}^0 соответствует u_{ij}^0, σ_{ij}^T – температурные добавки напряжений.

Окончательно выражения для температурных добавок перемещений и напряжений можно представить в виде:

$$u_i^T(x)=\frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)}\oint_L\left\{\frac{dT(y)}{dn_y}r\beta_i(2\ln r-1)-T(y)\left[2\beta_i\cos\varphi+n_i(y)(2\ln r-1)\right]\right\}dl_y, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^T=\frac{E\alpha}{4\pi(1-\nu)}\int_L&\left\{\frac{dT(y)}{dn_y}\left[\delta_{ij}(1+2\ln r)-2\beta_i\beta_j\right]+\right.\\&\left.+T(y)\frac{1}{r}\left[n_i(y)\beta_i+n_j(y)\beta_i-2\beta_i\beta_j\cos\varphi-\delta_{ij}\cos\varphi\right]\right\}dl_y.\end{aligned} \tag{9}$$

Система сингулярных интегральных уравнений относительно плотности $\mu_i(y)$:

$$\begin{aligned}\mu_i(x_L)+\frac{1}{2\pi(1-\nu)}\int_L&\Big\langle\mu_i(y)\cos\psi\left[(1-2\nu)+2\beta_i^2\right]+\mu_i(y)\Big\{(1-2\nu)\left[n_j(x)\beta_i-\right.\\&\left.-n_i(x)\beta_j\right]+2\beta_i\beta_j\cos\psi\Big\}\Big\rangle\frac{dl_y}{r(x,y)}=p_{np},\end{aligned} \tag{10}$$

где $p_{np} = p_i^0 + p_i^T$ – приведенная нагрузка, равна сумме температурной поверхностной нагрузки и механической нагрузки.

Решение полученных интегральных уравнений проводится численным методом. Численная реализация интегральных уравнений термоупругости построена на базе метода механических квадратур. Интегралы вычисляются при помощи квадратурных формул Гаусса.

Порядок решения задачи следующий. Основными исходными данными задачи по расчету напряжений при плазменном упрочнении, помимо уравнений (1) и (3) с соответствующими начальными и граничными условиями, являются: количество точек разбиения границы области, количество шагов по времени, коэффициенты линейного теплового расширения a, температуропроводности, Пуассона, размеры массивов плотностей, координаты точек границы области. На 1-м этапе решается уравнение (2), в результате решения которого находится распределение температуры в любой точке упрочняемого тела в требуемый момент времени. Далее определяются температурные добавки перемещений u_i^T, напряжений σ_{ij}^T и фиктивная температурная нагрузка p_i^T. На 2-м этапе решается система (9) относительно плотности потенциала μ, после чего определяются перемещения и напряжения по формулам (4) и (7) соответственно.

Разработанный алгоритм реализован на ПЭВМ. Достоверность формул и точность алгоритма подтверждена решением тестовых задач. Результаты сравнивались с решением данной задачи с помощью интегрального преобразования Лапласа [6, 7] и методом Фурье, а также с результатами, полученными с использованием конечно-элементного пакета ANSYS. По результатам расчетов построены графики распределения температуры и термонапряжений в поверхностном слое упрочняемой детали. Точность численного решения высока для внутренних точек и удовлетворительна для точек, примыкающих к границе области. Получены зависимости изменения теплового поля и напряжений как функции времени и координат.

Основными преимуществами применяемого метода по сравнению с другими существующими является необходимость дискретизации только границы области, при этом сохраняется высокая точность решения при уменьшении затрат машинного времени. Кроме того, учитываются условия закрепления закаливаемой детали и их влияние на процесс упрочнения.

Список литературы

1. Кундас С.П. Компьютерное моделирование процессов термической обработки сталей: монография – Мн.: Бестпринт, 2005. – 313с.
2. Спиридонов Н.В. и др. Плазменные и лазерные методы упрочнения деталей машин. – Мн. Вышэйшая школа, 1988. – 155с.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа, 1967 г. - 599 с.
4. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 404 с.
5. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978.
6. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. - М.: Высшая школа, 1964. - 559 с.
7. Веремейчик А.И. Применение интегрального преобразования Лапласа к исследованию нестационарных тепловых процессов // “Вестник БГТУ.- Математика, физика, химия”, №5, 2000. – с.49-50.