с небольшим потоком информации и с ограниченным количеством стационарных устройств. Каждое устройство позволяет выходить на связь с любым другим устройством, но связь между некоторыми парами может быть временно утеряна из-за топографических особенностей местности. Жизненно важным является не только быстро возобновить связь, но и поддерживать параметры сети. Кроме этого, каждое устройство имеет свой уникальный номер, работает как приемник, передатчик и маршрутизатор, получающий сообщение от одного устройства и направляющий его на другие устройства. Данная задача, сформулированная в терминах теории графов, звучит так: необходимо построить связный граф, не содержащий циклов. Множество всех возможных связей образует полный граф. Каждая отдельная сеть образует в этом полном графе остовное дерево. Список всех различных сетей (остовных деревьев) может быть заложен в программное обеспечение устройств связи. В случае потери связи проблема решается путем переключения на одну из резервных сетей. Таким образом, это задача разложения полного графа на остовные деревья и ее решение связано с наличием грациозной разметки у этих деревьев.

Обзор основных известных результатов по разметкам графов представлен в электронном журнале Д. Галлиана, который регулярно обновляется [7], [8]. Это издание также знакомит с открытыми проблемами и нерешенными задачами по каждому виду разметок. В журнале за 2016 год проведен анализ 2264 публикаций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Stewart, B.M. Magic graphs / B.M. Stewart // Cunud. J. Math. – 1966. –18. –P. 1031–1059.
2. Stanley, R. Linear homogeneous diophantine equations and magic labelings of graphs / R. Stanleey // Duke Math. J. – 1973. – 40 – P 607–632.
3. Bloom, G.S. Numbered complete graphs, unusual rulers and assorted applications, theory and applications of graphs / G.S. Bloom, S.W. Golomb // Lecture Notes in Math., Springer Verlag, New York. – 1978 – 642 – P.53–65.
4. Froncek, D. Fair incomplete tournaments with odd number of teams and large number of games / D. Froncek // Congressus Numerantium. – 2007. – 187. – P. 83–89.
5. Joseph, A. Mathematics and Sports / A. Joseph, Ed. Gallian. – Mathematical Association of Americ, 2010. – 338 p.
6. Froncek, D. Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments / D. Froncek // AKCE Int. J. Graphs Comb. – 2013. – Vol. 10, No. 2. – P. 119–127.
7. Gallian, J.A. A dynamic survey of graph labeling, Electron / J.A. Gallian // The electronic journal of combinatorics. – 2015, #D56. – 389 p.
8. Gallian, J.A. A dynamic survey of graph labeling, Electron/ J.A. Gallian // The electronic journal of combinatorics. – 2016, #D56. – 408 p.

С. В. СИДАК, О. В. МАТЫСИК

БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В вещественном гильбертовом пространстве *H* решается операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором *A*, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора *A*, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи (1) предлагается неявная итерационная процедура

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + 2\alpha Ay, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения *x* уравнения (1) при точной правой части *y*, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае приближения (2) примут вид

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2)x_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т.е. если $\lim_{\delta\to 0}\left(\inf_n \left\|x - x_{n,\delta}\right\|\right) = 0$.

Справедливы

Теорема 1. *Итерационный метод* (2) *при условии* $\alpha > 0$ *сходится в исходной норме гильбертова пространства*.

Теорема 2. *При условии* $\alpha > 0$ *метод итераций* (3) *сходится, если число итераций n выбирать из условия* $n^{1/2}\delta \to 0, \quad n \to \infty, \quad \delta \to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности процедуры (3)

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \le s^{s/2}(n\alpha e)^{-s/2}\|z\| + 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta, \ n \ge 1. \tag{4}$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть оценки (4) в точке, в которой производная от нее равна нулю: в результате получим априорный момент останова

$$n_{\text{опт}} = 2^{-2/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)}\alpha^{-1}e^{-s/(s+1)}\|z\|^{2/(s+1)}\delta^{-2/(s+1)}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (4), имеем

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}} \le (1+s)\cdot 2^{s/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{s(1-2)/(2(s+1))}e^{-s/(2(s+1))}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}. \tag{5}$$

Замечание 1. *Оценка погрешности* (5) *имеет порядок* $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$*, и как следует из* [1–2], *он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями* $x = A^s z, \ s > 0$.

Замечание 2. *Оптимальная оценка* (5) *не зависит от* α*, но от параметра* α *зависит* $n_{опт}$*, поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать* α*, удовлетворяющим условию* $\alpha > 0$ *и так, чтобы* $n_{опт} = 1$. *Для этого достаточно выбрать*

$$\alpha_{\text{опт}} = 2^{-2/(s+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)}e^{-s/(s+1)}\|z\|^{2/(s+1)}\delta^{-2/(s+1)}.$$

Рассмотрим погрешность метода (3) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, получаемое по формуле (3), а z_n – значение с учетом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha A^2\right)z_n + 2\alpha A y_\delta\right] + \alpha\gamma_n, \quad z_0 = 0. \tag{6}$$

Здесь γ_n – погрешность вычислений. Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (6) равенство (3). Имеем $\varepsilon_{n+1} = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(E - \alpha A^2\right)\varepsilon_n + \alpha\gamma_n, \quad \varepsilon_0 = 0$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции нетрудно получить, что $\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left(E + \alpha A^2\right)^{-(n-1-i)}\left(E - \alpha A^2\right)^{n-1-i}\alpha\gamma_i$.

В силу $\alpha > 0$ и тому, что $0 \in Sp\ A$ справедливо $\left\|\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(E - \alpha A^2\right)\right\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma, \quad \gamma = \sup_i|\gamma_i|$.

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности метода (3) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \le \left\|x - x_{n,\delta}\right\| + \left\|x_{n,\delta} - z_n\right\| \le s^{s/2}(n\alpha e)^{-s/2}\|z\| + 4n^{1/2}\alpha^{1/2}\delta + n\alpha\gamma, \ n \ge 1.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ
1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
2. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : МГУ, 1994. – 207 с.

С. А. СКВОРЦОВА
ЮНПУ имени К.Д. Ушинского (г. Одесса, Украина)

МЕТОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ФОРМИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ НАВЫКОВ

В 2006 году «Рекомендациями Европейского Парламента и Совета Европы» было обозначено восемь групп ключевых компетентностей, среди которых присутствует и математическая компетентность. Следует заметить, что значительный вклад в разработку сути и содержания ключевых компетентностей сделала Организация Экономического Сотрудничества и Развития, которой был начат международный проект «Определение и отбор ключевых компетентностей», известный под названием «DeSeCo» («Definition and Selection of Competencies»). Перечень ключевых компетентностей в образовательном и экономическом секторах, предложенный 12-ю странами-участницами проекта, показал, что математическая/ арифметическая/ вычислительная компетентность всеми странами отнесена к ключевым. Таким образом, для эффективной жизнедеятельности современный человек должен владеть вычислительными навыками.

Вопрос о формировании вычислительных навыков большинство методистов рассматривает с точки зрения разнообразия упражнений на вычисления (Н.Б. Истомина, Г.Г. Шмырева, Н.С. Пиядин, С.И. Волкова, М.И. Моро, М.Б. Будма-Горяева, Л.П. Дашевская, В.В. Елисеева и другие), содержания вычислительных приемов (Н.А. Бантова, Г.В. Бельтюкова, С.А. Скворцова, Г.И. Мартынова, Т.А. Шевченко, Н.П. Корсунская, Н.В. Рудовская, Н.П. Никитина). Система формирования вычислительных навыков у младших школьников была разработана и опубликована в 1993 году М.А. Бантовой. Автором определена суть вычислительного приема и вычислительного навыка, охарактеризован сформированный вычислительный навык, а также предложена методика работы по формированию вычислительных навыков. Между тем, учитывая, что на современном этапе развития мирового сообщества, вычислительная составляющая математической компетентности рассматривается как ключевая, необходим поиск современных подходов к построению системы формирования вычислительных навыков.

Согласно подходу А.М. Пышкало, методическая система является композицией пяти взаимосвязанных компонентов: цели, содержания, средств, методов и форм обучения. В условиях обновления общих целей образования школьников – формирования у них ключевых и предметных компетентностей – есть необходимость в обновлении цели методической системы формирования вычислительных навыков (МС ФВН). Исходя из этого, целью МС ФВН является формирование у учащихся вычислительной составляющей математической компетентности (вычислительной компетентности). Под вычислительной компетентностью понимаем способность школьника/школьницы быстро и правильно выполнять вычисления. Очевидно, что быстрые и правильные вычисления связаны с возможностью учащегося/учащейся актуализировать нужный прием вычисления, который эффективнее других приемов приводит к вычислительному результату, а также связаны со способностью быстро и безошибочно реализовывать операции, составляющие этот прием. Под вычислительным приемом понимаем систему операций, выполнение которых приводит к нахождению результата арифметического действия – это ориентировочная основа действия (ООД). Заметим, что операции, составляющие ООД приема, устанавливаются исходя из теоретических основ, которыми могут быть законы арифметических действий, правила, свойства, зависимости. Таким образом, содержанием обучения в МС ФВН является вычислительные приемы, наивысшая степень овладения которыми понимается как вычислительный навык. Приобрести вычислительные навыки – для каждого случая знать, какие операции и в каком порядке следует выполнять, чтобы получить результат арифметического действия и выполнять эти операции достаточно быстро.

Придерживаясь классификации вычислительных приемов М.А. Бантовой [1], выделяем группы: 1. Приемы, теоретическая основа которых – конкретный смысл арифметических действий. 2. Приемы, теоретической основой которых служат свойства арифметических действий. 3. Приемы, теоретическая основа которых – связи между компонентами и результатами арифметических действий. 4. Приемы, теоретическая основа которых – изменение результатов арифметических действий в зависимости от изменения одного из компонентов. 5. Приемы, теоретическая основа которых – вопросы нумерации чисел. 6. Приемы, теоретическая основа которых – правила. Предложенная классификация