РАЗДЕЛ V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И АЛГЕБРА КЛИФФОРДА

Андрушкевич И.Е., Шиёнок Ю.В.

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,г. Витебск.

Проблема поиска решения системы уравнений Максвелла [1]

$$\mathrm{rot}E=-\frac{\partial B}{\partial t},\ \mathrm{rot}H=\frac{\partial D}{\partial t}+j,\ \mathrm{div}D=\rho,\ \mathrm{div}B=0,\ D=D(E),\ B=B(H),\ j=j(E). \qquad (1)$$

по-прежнему является актуальной.

Наработана масса методов для решения системы (1) для случаев конкретных сред и граничных условий [2]. Среди них нас в первую очередь будут интересовать аналитические.

Задача настоящих исследований - изучение вопроса адаптации алгебраического метода разделения переменных (АМРП) [3] на случай системы уравнений Максвелла.

АМРП был разработан для решения ковариантного обобщения уравнения Дирака (КОУД) [4], которое для частицы с нулевой массой покоя можно записать

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{4}\gamma^{\nu}(\partial_{\nu}-\Gamma_{\nu})\right\}\Psi=0.$$

Матрицы γ являются матрицами Дирака Риманова пространства размерности 4×4 и подчиняются требованиям алгебры Клиффорда [5].

$$[\tilde{\gamma}^{i},\tilde{\gamma}^{j}]_{+}=\tilde{\gamma}^{i}\tilde{\gamma}^{j}+\tilde{\gamma}^{j}\tilde{\gamma}^{i}=\pm2\,I;\ i,j=1,2,3,4,,\ \mathbf{I}=\mathrm{diag}(1,1,1,1).$$

Связь с матрицами Дирака пространства Минковского осуществляется посредством следующего соотношения

$$\gamma^{\nu}=h_{i}^{\nu}\tilde{\gamma}^{i}=a_{\nu1}\tilde{\gamma}^{1}+a_{\nu2}\tilde{\gamma}^{2}+a_{\nu3}\tilde{\gamma}^{3}+a_{\nu4}\tilde{\gamma}^{4}$$

здесь $a_{\nu l}$ – является произвольной положительно определенной функцией четырех переменных, явный вид которых определяется физикой задачи. Введя обозначения

$$B_{j}=\sum_{i=1}^{4}a_{ji}\tilde{\gamma}^{i}\tilde{\gamma}^{j},\ j=1,2,3,\ B_{4}=-\sum_{i=1}^{4}a_{4i}\tilde{\gamma}^{i}\tilde{\gamma}^{4},$$

получим эквивалентную запись КОУД

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{4}B_{\nu}\tilde{\gamma}^{\nu}(\partial_{\nu}-\Gamma_{\nu})\right\}\Psi=0. \qquad (2)$$

Среди матричных представлений системы (1) [6-10], мы выбрали матричное уравнение в виде (см. [10])

$$\left\{\xi^{1}\frac{\partial}{\partial x}+\xi^{2}\frac{\partial}{\partial y}+\xi^{3}\frac{\partial}{\partial z}+\xi^{4}M\frac{\partial}{\partial t}+\Theta\right\}\Phi=PJ \qquad (3)$$

где алгебра матриц ξ удовлетворяет соотношениям алгебры Клиффорда

$$[\xi^{i},\xi^{j}]_{+}=\xi^{i}\xi^{j}+\xi^{j}\xi^{i}=\pm2\,I;\ i,j=1,2,3,4,5,6,\ \mathbf{I}=\mathrm{diag}(1,1,1,1,1,1,1,1).$$

Следовательно, уравнения (2) и (3) имеют в основе использование матриц алгебры Клиффорда. Отличием является размерность матриц (размерность матриц в уравнении (3) в два раза больше) и представление дифференциальных операторов (дифференциальные операторы уравнения (3) от различных переменных являются неравноправными).

Таким образом, цель данного исследования сводится к поиску возможности приведения уравнения (3) к виду аналогичному КОУД.

Пока формально запишем уравнение по внешнему виду схоже с КОУД (2)

$$\sum_{i=1}^{4}\partial_i \xi^i \tilde{R}_i^a \Phi + \xi^4 \tilde{Q}\Phi = \tilde{P}J \,. \tag{4}$$

При следующем выборе матриц

$$\tilde{R}_1^a = \begin{pmatrix} r_1^1 & & & & & & & \\ & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12_2} & -\varepsilon_{13} & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & -\mu_{13} & \mu_{12} & \mu_{11} & \\ & & & & & & & r_2^1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}_2^a = \begin{pmatrix} r_1^2 & & & & & & & \\ & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} & & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & & -\mu_{23} & \mu_{22} & \mu_{21} & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & r_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}_3^a = \begin{pmatrix} r_1^3 & & & & & & & \\ & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & 0 & & \\ & -\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & & & & \\ & & & & \mu_{33} & -\mu_{32} & -\mu_{31} & \\ & & 0 & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & r_2^3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}_4^a = c \cdot \begin{pmatrix} r_1^4 & & & & & & & \\ & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} & & & & \\ & \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} & & 0 & & \\ & -\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & & & & \\ & & & & \mu_{33} & -\mu_{32} & -\mu_{31} & \\ & & 0 & & -\mu_{23} & \mu_{22} & \mu_{21} & \\ & & & & -\mu_{13} & \mu_{12} & \mu_{11} & \\ & & & & & & & r_2^4 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} & & & & \\ & \sigma_{21} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} & & 0 & & \\ & -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & \sigma_{33} & & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & 0 & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P} = \mathrm{diag}(0,0,0,0,0,0,\rho,0)\,, \tag{5}$$

уравнение (4) будет эквивалентно системе (1) с материальными уравнениями, соответствующими анизотропной среде

$$D_i = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_j\ , \quad B_i = \sum_{j=1}^{3} \mu_{ij} H_j\ , \quad j_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} E_j\ .$$

Матрицы (5) назовем материальными. Уравнение (4) остается эквивалентным системе (1) при произвольном выборе матричных элементов r_1^i, r_2^i, которые для определенности назовем параметрами разделения.

Матричное уравнение в форме (4) является неоднородным и расширяет область применения матричного представления системы уравнений Максвелла на область анизотропных сред. Для случая $\rho=0$ и $j=0$ уравнение (4) становится однородным и его запись упрощается

$$\sum_{i=1}^{4} \partial_i \xi^i \tilde{R}_i^a \Phi = 0\ . \qquad (6)$$

Уравнения (6) по внешнему виду совпадают с уравнением (2). Однако сходство является не только внешним, т.к. в их основе лежит использование алгебры Клиффорда. Таким образом, матричная форма (4), (6) является перспективной для адаптации АМРП на решение задач электродинамики. Основным отличием является физика, определяющая материальные матрицы, и большая размерность матриц, делающая целесообразным создание и использование специализированной системы компьютерной алгебры.

Литература

1. М. Планк, Введение в теоретическую физику, Ч.3. Теория электричества и магнетизма. - М.:ГТТИ, 1933.
2. А.Д. Полянина, В.Ф. Зайцева, А.И. Журова, Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. - М.: Физматлит, 2005.
3. Андрушкевич И.Е., Шишкин Г.В. О критериях разделимости переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях. Теор. и мат. физика. Т. 70. № 2. 1987. С. 289-302.
4. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. - М.: ГИТТЛ,1956.
5. Бете Г.А. Квантовая механика. - М.:Мир, 1965.
6. Федоров Ф.И., Обобщенные релятивистские волновые уравнения. Доклад АН СССР, 1952, 82, 37.
7. Bludman S.A. Some theretical consequanses of particle having mass zero. Phisical Review, 1951, № 78, С. 113.
8. Lomont J.S., Dirac-Like Wave Equations for Particles of Zero Rest Mass, and Their Quantization. Phys. Rev., 1958, 111 1710.
9. Боргардт А.А., Антикоммутативные матрицы в теории мезона. Доклад АН СССР, 1951, Т. 78, № 6. С. 1113-1114.
10. Андрушкевич И.Е., Матричное представление системы уравнений Максвелла. «Ученые записки» УО «ВГУ им. П.М. Машерова», том 5. - Витебск 2006.