$$E\{T_i(h_i)\} = \frac{2^{n_i}-1}{pk+(1-p)d}h_i - 1 + \frac{p(k^2+k)+(1-p)(d^2+d)}{2(pk+(1-p)d)^2} + o(1) \quad (5).$$

Замечание 3. Период последовательности состояний автомата U есть такое число T, для которого выполняются равенства (4) при всех $i=\overline{1,m}$. Очевидно, что в этом случае $h_q = \min_{1\le i\le m}\{h_i\}$. Поскольку для T справедливо представление (4), то период последовательности состояний автомата есть $\eta(2^{n_q}-1)h_q - 1$, где $h_q \in \{1,2,...,|S|/(2^{n_q}-1)\}$. Тогда, если $k=0, d=1$, то $E\{T(h_q)\} = (2^{n_q}-1)h_q/(1-p)-1$. В других случаях для математического ожидания периода автомата U справедлива оценка (5).

В таблице 2 приведен сравнительный анализ результатов, полученных при изучении периодических свойств последовательности состояний автомата U. Отметим, что $E\{T(1)\}$ ($LFSR_q$ — регистр сдвига наибольшей длины, вернулся в начальное состояние после первого прохода своего периода), близко к длине наиболее вероятного цикла из промежутка $[K/(k+1), K/k[$, если $k>0$, и $[K,2K[$, в случае $k=0$.

Таблица 2. *Средний и наиболее вероятный период*

p	k	d	$n\in[N_1,N_2[$	n_*	n^*	$E\{T\}$
½	1	2	$n\in[K/2,K[$	$\lfloor 2K/3-5/9\rfloor$	$\lceil 2K/3-1/3\rceil$	$2K/3-1/9+o(1)$
¼	1	2	$n\in[K/2,K[$	$\lfloor 4K/7-33/49\rfloor$	$\lceil 4K/7-3/7\rceil$	$4K/7-13/49+o(1)$
½	0	1	$n\in[K,2K[$	$2K-1$	$2K-1$	$2K-1$
¼	0	1	$n\in[K,2K[$	$\lfloor 4K/3-1\rfloor$	$\lceil 4K/3-1\rceil$	$4K/3-1$

Литература

1. Михайлов В.Г. //Труды по дискретной математике. 2002. Т. 5. С. 167.
2. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля: В 2т. М., 1988. - Т.2. С. 495.
3. Боровков А. А. Теория вероятностей. - М., 2003.

СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРАВИЛОМ ОСТАНОВА ПО НЕВЯЗКЕ

Василькович С.И., Савчук В.Ф.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Для решения операторного уравнения $Ax=y$ в гильбертовом пространстве H с положительным самосопряженным ограниченным оператором A предлагается итерационный метод

$$x_{n+1} = (E-\alpha A)^2 x_n + A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^2\right]y, x_0 = 0. \quad (1)$$

Здесь нуль не является собственным значением оператора A, поэтому решение единственно. Однако $0\in SpA$ и, значит, рассматриваемая задача неустойчива, т.е. некорректна. Предполагается, что при точной правой части уравнения y существует точное решение x.

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой погрешностью δ, т.е. известен y_δ, для которого $\|y-y_\delta\|\le\delta$. Поэтому вместо (1) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1,\delta} = (E-\alpha A)^2 x_{n,\delta} + A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^2\right]y_\delta, x_{0,\delta} = 0. \quad (2)$$

Показано, что метод (2) сходится при условии $0<\alpha\le\frac{2}{\|A\|}$, если число итераций n выбирать из условия $n\delta\to 0, n\to\infty, \delta\to 0$. В случае априорного выбора числа итераций для получения оценок погрешности и априорного момента останова требуется предположение об истокопредставимости точного решения, т.е. $x=A^S z$, $s>0$.

Метод (2) можно сделать вполне эффективным и в случае, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения, если воспользоваться правилом останова по невязке. Зададим $\varepsilon>0$ и момент m останова итерационного процесса (2) условием

$$\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon, \quad (n<m), \quad \|Ax_{m,\delta}-y_\delta\|\le\varepsilon, \quad \varepsilon=b\delta, \quad b>1. \tag{3}$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\|Ax_{0,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon$. Покажем возможность применения правила (3) к методу (2). Метод (2) с остановом (3) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}(\inf\limits_{m}\|x-x_{m,\delta}\|)=0$. Рассмотрим функцию $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^2\right]$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ выполняются условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|g_n(\lambda)|\le 2n\alpha, \qquad n>0, \quad M=\|A\|,\ 0<\alpha<2/M, \tag{4}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}|1-\lambda g_n(\lambda)|\le 1, \quad 0<\alpha<2/M, \tag{5}$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to 0, n\to\infty, \forall\lambda\in(0,M],\ 0<\alpha<2/M, \tag{6}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^S|1-\lambda g_n(\lambda)|\le\left(\frac{s}{2\alpha e}\right)^S n^{-S},\ n>0, 0\le s<\infty, 0<\alpha\le\frac{5}{4M}. \tag{7}$$

Аналогично [1] доказываются леммы.

Лемма 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0, \|A\|\le M$, *Тогда для любого* $w\in H$ *выполняется* $(E-Ag_n(A))w\to 0, n\to\infty$.

Лемма 2. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le M$, *Тогда для любого* $v\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^s\|A^S(E-Ag_n(A))v\|\to 0, n\to\infty, 0\le s<\infty$.

Лемма3. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le M$, *Если для некоторых* $n_p<\bar{n}=const$ *и* $v_0\in\overline{R(A)}$ *при* $p\to\infty$ *имеем* $w_p=A(E-Ag_{n_p}(A))v_0\to 0$, *то* $v_p=(E-Ag_{n_p}(A))v_0\to 0$.

Используем леммы 1-3 при доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. *Пусть* $A=A^*\ge 0$, $\|A\|\le M$, *и пусть момент останова* $m=m(\delta)$ *в методе* (2) *выбирается по правилу* (3). *Тогда метод* (2) *сходится.*

Доказательство.

По индукции нетрудно показать, что $x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^{2n}\right]y_\delta$.

Тогда,

$$x_{n,\delta}-x=g_n(A)(y_\delta-y)-(E-Ag_n(A))x. \tag{8}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A(E - Ag_n(A))x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \tag{9}$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0, n \to \infty, \tag{10}$$

$$\sigma_n = n\|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, n \to \infty. \tag{11}$$

Кроме того, из (4) и (5) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \le 2\alpha n\delta, \tag{12}$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \le 1. \tag{13}$$

Применим правило останова (3). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le b\delta, b > 1$ и из (9) и (13) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \le \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \le (b+1)\delta. \tag{14}$$

Для любых $n < m$ справедливо неравенство $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Поэтому

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \ge \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \ge (b-1)\delta. \tag{15}$$

Из (11) и (15) при $n = m - 1$ получаем $\frac{\sigma_{m-1}}{m-1} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \ge (b-1)\delta$ или, что то же, $(m-1)\delta < \frac{\sigma_{m-1}}{m-1} \to 0, \delta \to 0$, (так как из (11) $\sigma_{m-1} \to 0$, $m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$, то, используя (8), получим $\|x_{m,\delta} - x\| \le \|A(E - Ag_m(A))x\| + 2\alpha m\delta \to 0$, $m \to \infty$, $\delta \to 0$, так как из (10) вытекает $\|A(E - Ag_m(A))x\| \to 0, m \to \infty$.

Если же для некоторых δ_n последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае нетрудно показать, что $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x, \delta_n \to 0$**.** Теорема 1 доказана.

<u>**Теорема 2.**</u> *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $x = A^S z, s > 0$, тогда справедливы оценки* $m(\delta) \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{S}{S+1}}$,

$$\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \le [(b+1)\delta]^{s(s+1)}\|z\|^{\frac{s}{s+1}} + 2\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{s}{s+1}}\right\}\delta. \tag{16}$$

Доказательство

Имеем

$$\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| = \|A^{S+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\| = \left\|\int_0^M \lambda^{S+1}(1-\alpha\lambda)^{2(m-1)}dE_\lambda z\right\| \le$$

$\le (s+1)^{S+1}[2(m-1)\alpha e]^{-(S+1)}\|z\|$. Воспользовавшись (15), получим

$$(b-1)\delta \le (s+1)^{s+1}[2(m-1)\alpha e]^{-(s+1)}\|z\|, \text{ откуда } m \le 1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{S+1}}.$$

При помощи неравенства моментов оценим норму

$$\|(E-Ag_m(A))x\| \le \|A(E-Ag_m(A))x\|^{\frac{S}{S+1}}\|z\|^{\frac{1}{S+1}} \le [(b+1)\delta]^{\frac{S}{S+1}}\|z\|^{\frac{1}{S+1}}. \text{ (см. (14)).}$$

Тогда, поскольку соотношение (8) справедливо для любых n, то

$$\|x_{m,\delta}-x\| \le \|(E-Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{S}{S+1}}\|z\|^{\frac{1}{S+1}} + 2m\alpha\delta \le$$

$$\le [(b+1)\delta]^{\frac{S}{S+1}}\|z\|^{\frac{1}{S+1}} + 2\alpha\left\{1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{S+1}}\right\}\delta.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (16) есть $O(\delta^{s(s+1)})$ и он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями $x = A^S z, s > 0$.

Замечание 2. Хотя формулировка теоремы 2 даётся с указаниями степени представимости s и истокопредставимого элемента z, на практике их значение не потребуется, так как они не содержатся в правиле останова (1). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (1), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризирующие свойства.

По мажорантным оценкам погрешности метод (2) не имеет преимущества по сравнению с широко известным методом простой итерации

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y - Ax_{n,\delta}), x_{0,\delta} = 0$$

Его преимущество состоит в следующем: для достижения оптимальной точности методом (2) нужно сделать в 2 раза меньше итераций, чем методом простой итерации.

Литература

1. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах/ Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретейников. – М.: Наука, 1986. – 176 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МОМЕНТОВ ОСРЕДНЕНННОЙ ОЦЕНКИ ВЗАИМНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Войнов А.Ф., Мирская Е.И.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Среди непараметрических методов спектрального оценивания одним из наиболее распространённых является метод Уэлча, в котором для построения оценки спектральной плотности производится осреднение периодограмм, построенных по непересекающимся интервалам исходной последовательности наблюдений, и вводятся окна просмотра данных для уменьшения смещения оценок.

Оценки такого вида были исследованы П.Уэлчем для гауссовских процессов. В данной работе обобщаются результаты, полученные Уэлчем на многомерные временные ряды и произвольные окна просмотра данных. Исследуется асимптотическое поведение и скорость сходимости моментов построенной оценки.