Сравнение нерегуляризованных и регуляризованных методов показывает, что общее время работы регуляризованных методов меньше как минимум в два раза, чем работа нерегуляризованных методов.

Литература

1. Мадорский В.М., Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений – Брест, 2005.
2. Вержбицкий, В.М., Численные методы / В.М. Вержбицкий. – Минск: Высш. шк., 2002. – 840 с..
3. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона // Ж. вычисл. Матем. Физ. – 1981.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ДЛЯ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ I РОДА

В. Ю. Гондюк, В. Ф. Савчук
Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, г. Брест

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение 1 рода

$$Ax = y, \qquad (1)$$

где A - ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Причем нуль принадлежит спектру оператора A, т.е. задача некорректна. Предполагается существование единственного решения x при точной правой части y. Для его отыскания предлагается итеративный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A)^2 x_n + 2\alpha y - \alpha^2 Ay, \qquad x_0 = 0. \qquad (2)$$

Однако на практике часто правая часть y уравнения (1) бывает неизвестной, а вместо y известно приближение $y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta$, тогда метод (2) примет вид:

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta - \alpha^2 Ay_\delta, \qquad x_{0,\delta} = 0. \qquad (3)$$

Рассмотрим сходимость процессов (2) и (3) в энергетической норме

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}, \text{ где } x \in H.$$

При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ.

Полагаем, что $x_{0,\delta} = 0$ и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \qquad (4)$$

Запишем первое слагаемое в виде $x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A)^{2n} y = (E - \alpha A)^{2n} x$.

При $0 < \alpha < \dfrac{2}{\|A\|}$ имеем $\|E - \alpha A\| < 1$, поэтому $x - x_n \to 0$, $n \to \infty$. Однако скорость сходимости к нулю может быть сколь угодно малой, и для ее оценки требуется дополнительное предположение об истокопредставимости точного решения.

Использование энергетической нормы позволяет получить априорную оценку погрешности метода (3) и априорный момент останова без требования истокопредставимости точного решения. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = \left(A(E - \alpha A)^{2n} x, (E - \alpha A)^{2n} x\right) = \int_0^M \lambda(1 - \alpha\lambda)^{4n} d(E_\lambda x, x), \ M = \|A\|, \ E_\lambda$$ - соответствующая спектральная функция.

Нетрудно доказать, что при условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$

$$max\left|\lambda(1-\alpha\lambda)^{4n}\right| \le (4n\alpha e)^{-1}.$$

Для второго слагаемого в (4) при условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$ доказаны неравенства:

$$\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left(\frac{5}{2}n\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\delta,\ n \ge \frac{1}{2}, \tag{5}$$

$$\left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left(\frac{35}{27}n\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\delta,\ n \ge 1. \tag{6}$$

Поскольку

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left\|x - x_n\right\|_A + \left\|x_n - x_{n,\delta}\right\|_A \le \left\|x - x_n\right\|_A + \left(\frac{35}{27}n\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\delta, n \ge 1$$

и $\left\|x - x_n\right\|_A \to 0, n \to \infty$, то для сходимости $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \to 0, n \to \infty$ достаточно, чтобы $\sqrt{n}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$.

Таким образом, если в процессе (3) выбрать число итераций $n = n(\delta)$ зависящим от δ так, что $\sqrt{n}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$, то получим регуляризованный метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3) при выполнении условия $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le (4n\alpha e)^{-\frac{1}{2}}\left\|x\right\| + \left(\frac{5}{2}n\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\delta,\ n \ge \frac{1}{2}.$$

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le (4n\alpha e)^{-\frac{1}{2}}\left\|x\right\| + \left(\frac{35}{27}n\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\delta\ ,\ n \ge 1 \tag{7}$$

Итак доказаны:

Теорема 1. Итерационный процесс (3) при условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$ сходится в энергетической норме гильбертова пространства H, если выбирать число итераций n из условия $\sqrt{n}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$.

Теорема 2. При условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$ для метода (3) справедливы оценки погрешности (7) в энергетической норме гильбертова пространства H.

Оптимизируем полученную оценку (7) по n, т.е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций n, при котором оценка погрешности становится минимальной.

Приравняв нулю производную по n от правой части неравенства (7) и проведя ряд преобразований, получим

$$n_{опт} = \left(\frac{35}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}(2\alpha\delta)^{-1}e^{-\frac{1}{2}}\left\|x\right\|. \tag{8}$$

Подставив $n_{опт}$ в оценку (7), получим ее оптимальное значение

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{опт} \le \left(\frac{35}{27}\right)^{\frac{1}{4}} (2\delta\|x\|)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}}. \qquad (9)$$

Из (9) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра α, но от него зависит $n_{опт}$. Поэтому для уменьшения $n_{опт}$ и, значит, объема вычислительной работы, следует брать α по возможности большим, удовлетворяющим условию $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$ и так, чтобы $n_{опт}$ было целым. Таким образом, доказана

Теорема 3. При условии $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$ оптимальная оценка погрешности для метода (3) имеет вид

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{опт} \le \left(\frac{35}{27}\right)^{\frac{1}{4}} (2\delta\|x\|)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}}$$

и получается при

$$n_{опт} = \left(\frac{35}{27}\right)^{-\frac{1}{2}} (2\alpha\delta)^{-1} e^{-\frac{1}{2}} \|x\|.$$

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H. Эти условия дает

Теорема 4. Если выполнены условия:

1) $E_{\varepsilon} x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_{\varepsilon} x = 0$, где $E_{\varepsilon} = \int_0^{\varepsilon} dE_{\lambda}$, ε - фиксированное положительное число $(0 < \varepsilon < \|A\|)$, то из сходимости $x_{n,\delta}$ к x в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.

Замечание 1. Так как $x_{n,\delta} = A^{-1}\left\lfloor E - (E - \alpha A)^{2n} \right\rfloor y_{\delta}$, то для того, чтобы $x_{n,\delta}$ удовлетворяло условию $E_{\varepsilon} x_{n,\delta} = 0$, достаточно потребовать, чтобы $E_{\varepsilon} y_{\delta} = 0$. Т.о., если $E_{\varepsilon} x = 0$ и $E_{\varepsilon} y_{\delta} = 0$, то из сходимости итераций в энергетической норме следует их сходимость в обычной норме пространства H.

Замечание 2. Использование энергетической нормы позволило нам получить оценки погрешности метода и априорный момент останова $n_{опт}$ без требования знания истокопредставимости точного решения, что делает метод (3) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКОГО ПЕРЕНОСА В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ НА ОСНОВЕ LBE-АЛГОРИТМОВ

Ивашкевич Е.В.

Белорусский государственный университет, г. Минск

В последние 5 лет наблюдается значительный рост интереса к изучению явления электрокинетического переноса вещества, энергии и электрических зарядов. Это объясняется важностью электрокинетического массо- и теплопереноса в практических областях, связанных с разработкой и производством электромеханических систем на микро- и наномасштабах, а также топливных элементов.