О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАВИЛА ОСТАНОВА ПО СОСЕДНИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ ДЛЯ ЯВНОГО МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пантелеева Е.В, Савчук В.Ф.
Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г. Брест

В действительном гильбертовом пространстве H решается уравнение 1 рода

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $\|y-y_\delta\| \le \delta$ и A - ограниченный, положительный, несамосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Считается, тем не менее, что нуль принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна. Предположим, что при точной правой части y существует единственное решение x уравнения (1). Для его отыскания используем явную схему метода итераций

$$z_{n+1} = \left(E-\alpha A^*A\right)^3 z_n + A^{-1}\left[E-\left(E-\alpha A^*A\right)^3\right]y_\delta + \left(E-\alpha A^*A\right)^3 u_n, \ z_0 \in H. \tag{2}$$

Здесь u_n - ошибки вычисления итераций, $\|u_n\| \le \beta$. Обозначим

$$C = \left(E-\alpha A^*A\right)^3, \ \ B = A^{-1}\left[E-\left(E-\alpha A^*A\right)^3\right].$$

Тогда метод (2) запишется в виде $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$. В дальнейшем будем использовать равенство $A^*Ax = A^*y$. Определим момент m останова итерационного процесса условием

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, \ (n < m), \ \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon, \tag{3}$$

где ε - заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова). Покажем, что метод (2) с правилом останова (3) сходится. Получим оценку для момента останова.

Справедливы леммы.

Лемма 1. Пусть приближение w_n определяется равенством

$$w_0 = z_0, \ w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n, \ n \ge 0, \tag{4}$$

тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2. \tag{5}$$

Доказательство

Из (4) имеем $Cu_k = w_{k+1} - Cw_k - By$. Отсюда, используя $A^*Ax = A^*y$, получим $u_k = C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}By =$

$$= C^{-1}w_{k+1} - w_k - \left(E-\alpha A^*A\right)^{-3}\left(A^*A\right)^{-1}\left[E-\left(E-\alpha A^*A\right)^3\right]A^*Ax = C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}(E-C)x =$$

$$= C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}x + x = C^{-1}\left(w_{k+1}-x\right) - \left(w_k - x\right).$$

Обозначим $\Delta_k = w_k - x$, тогда $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$, откуда $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$.

Имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2=\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1}-C\Delta_k,\Delta_{k+1}-C\Delta_k)=\sum_{k=1}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,C\Delta_k)-2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1},C\Delta_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,C\Delta_k)-2\sum_{k=0}^{n-1}\left(C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1},C^{\frac{1}{2}}\Delta_k\right). \quad (6)$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (6) по неравенству Коши-Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{m-1}\|Cu_k\|^2\geq\sum_{k=1}^{n}(\Delta_k,\Delta_k)+\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,C\Delta_k)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что

$$(E-C)\Delta_k=w_k-w_{k+1}+Cu_k,k\geq 0. \quad (8)$$

Используя неравенство (8), запишем неравенство (7) в виде

$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)-(\Delta_0,\Delta_0)+\gamma_n$, где

$$\gamma_n=2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)-(C\Delta_n,C\Delta_n)-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Нетрудно показать, что $\gamma_n\geq 0$ при любых $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n$. Отсюда

$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k,(E-C)\Delta_k)$. Применив равенство (8), получим:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\geq-(\Delta_0,\Delta_0)+\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2,$$

откуда $\sum_{k=0}^{n}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2\leq\|w_0-x\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2$, ч.т.д.

Лемма 2. При $\forall w_0\in H$ и произвольной последовательности ошибок $\{u_n\}$, удовлетворяющих условию $\|u_n\|\leq\beta$, выполнено неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}\|\leq 2\|C\|\beta. \quad (9)$$

Лемма 2 доказывается аналогично подобной в [1].

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть уровень останова $\varepsilon=\varepsilon(\delta,\beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y-y_\delta$ и u_n. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta,\beta)>2\|C\|\beta$, то момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0\in H$ и любых y_δ и u_n, удовлетворяющих условиям $\|y_\delta-y\|\leq\delta$, $\|u_n\|\leq\beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta)>\|B\|\delta+2\|C\|\beta$, то справедлива оценка

$$m\le\frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta)\to 0,\ \delta,\beta\to 0$ и $\varepsilon(\delta,\beta)\ge d\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta^p\right)$, где $d>1,\ \ p\in(0,1)$, то $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m-x\|=0.$

Доказательство

а) По индукции нетрудно показать, что

$$z_n=C^n z_0+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k\left(C^{-1}By_\delta+u_{n-k-1}\right), \tag{10}$$

отсюда $\quad w_n=C^n w_0+A^{-1}\left(E-C^n\right)y+C\sum\limits_{k=0}^{n-1}C^k u_{n-k-1}.$

Учитывая, что $z_0=w_0$, получим

$$\|z_n-z_{n+1}\|\le\|w_n-w_{n+1}\|+\|BC^n(y-y_\delta)\|. \tag{11}$$

Используя интегральное представление оператора, показывается, что $\|BC^n(y-y_\delta)\|\to 0,\ n\to\infty$. Поэтому (см. лемму 2) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|z_n-z_{n+1}\|\le\varliminf\limits_{n\to\infty}\|w_n-w_{n+1}\|\le 2\|C\|\beta.$ Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta)>2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0\in H$ и любых y_δ, $\|y_\delta-y\|\le\delta$, и u_n, $\|u_n\|\le\beta$.

б) Рассмотрим последовательность (4) и определим момент останова m' условием

$$\|w_n-w_{n+1}\|>\varepsilon-\|B\|\delta,(n<m'),\ \|w_{m'}-w_{m'+1}\|\le\varepsilon-\|B\|\delta. \tag{12}$$

Из (12) следует, что $m\le m'$. Из леммы 1 при $n=m'$ получим $\sum\limits_{k=0}^{m'}\|w_k-w_{k+1}+Cu_k\|^2\le\|w_0-x\|^2+\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$. Отсюда $\sum\limits_{k=0}^{m'}\left(\|w_k-w_{k+1}\|-\|C\|\beta\right)^2\le\|w_0-x\|^2+\sum\limits_{k=0}^{m'-1}\|Cu_k\|^2$.

Так как при $n<m'$ имеем $\|w_n-w_{n+1}\|>\varepsilon-\|B\|\delta$,

то $m'(\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta)^2\le\|w_0-x\|^2+m'\|C\|^2\beta^2$. Учитывая, что $w_0=z_0$ и $m\le m'$, получим

$$m'\le m\le\frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)}.$$

в) Из (10) вычтем $x=C^n x+C\sum\limits_{k=0}^{n-1}BC^k y$, получим

$$z_n-x=C^n(z_0-x)+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k\left[C^{-1}B(y_\delta-y)+u_{n-k-1}\right]. \tag{13}$$

Отсюда

$$\|\Delta_n\|\le\|C^n\Delta_0\|+(\|B\|\delta+\|C\|\beta)n, \tag{14}$$

где $\Delta_n=z_n-x,\ \Delta_0=z_0-x$. В частности, (14) справедливо и при $n=m$.

Так как спектр оператора $C=\left(E-\alpha A^{*}A\right)^{3}$ принадлежит $[0,1]$, то $\left\|C^{n}(E-C)\right\|\le\frac{1}{n+1}$. Поэтому из (13) при $n=m-1$

$$\|z_{m-1}-z_m\|\le\frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0-x)\right\|+\|B\|\delta+\|C\|(2+\ln m)\beta.$$

Поскольку по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta)\ge d\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta^{p}\right),\ d>1,\ p\in(0,1)$, то при всех достаточно малых δ,β выполняется неравенство

$\varepsilon(\delta,\beta)>\|B\|\delta+2\|C\|\beta$, поэтому из **б)** получим

$m\le\frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)}$. Так как $\|z_{m-1}-z_m\|>\varepsilon$, то

$\varepsilon\le\frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0-x)\right\|+\|B\|\delta+\|C\|(2+\ln m)\beta$. Отсюда

$$m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\le\frac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0-x)\right\|\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)}{\varepsilon-\|B\|\delta-\|C\|\beta\left[2+\ln\frac{\|z_0-x\|^2}{(\varepsilon-\|B\|\delta-2\|C\|\beta)(\varepsilon-\|B\|\delta)}\right]}.$$ Следовательно,

$m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\to0$ при $m\to\infty,\delta,\beta\to0$. Так как при $m\to\infty$ $\left\|C^{m}\Delta_0\right\|\to0$, то $\lim\limits_{\substack{\delta\to0\\ \beta\to0}}\|\Delta_m\|\le\lim\limits_{\substack{\delta\to0\\ \beta\to0}}\|z_m-x\|\le\lim\limits_{\substack{\delta\to0\\ \beta\to0}}\left(\left\|C^{m}\Delta_0\right\|+m\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta\right)\right)=0.$

Если номера останова m, зависящие от $\varepsilon, y-y_\delta, \{u_n\}$, не стремятся к ∞ при $\varepsilon,\delta,\beta\to0$, а окажутся ограниченными, то и в этом случае $z_m\to x,\ \beta\to0,\ \delta\to0,\ \varepsilon\to0$, ч.т.д.

Литература

1. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач/И.В. Емелин, М.А. Красносельский//Автоматика и телемеханика.-1978.-№12.-С.59-63.

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ КВАЗИНЬЮТОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рыбачук Г.Г.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, Брест.

Задача отыскания решения системы нелинейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

где вектор-неизвестных $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$, $f=(f_1,f_2,...,f_n)^T$ - нелинейная вектор-функция. На практике она встречается значительно чаще, чем уравнение с одним неизвестным, так как в реальных исследованиях интерес представляет, как правило, определение не одного, а нескольких параметров (нередко их число доходит до сотен и тысяч).

Найти точное решение системы, то есть вектор $x^*=(x_1,x_2,...,x_n)^T$, удовлетворяющий уравнениям (1), практически невозможно. Единственно реальный путь решения системы (1)