2. Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. - Wolfram Media/Cambridge Univ. Press, 1999. - 1470 p.
3. Прокопеня, А.Н. О симметричных гомографических решениях ньютоновой задачи четырех тел / А.Н. Прокопеня // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры: материалы междунар. конф. DE&CAS'2005, Брест, 5-8 окт. 2005г.: в 2 ч. / БГПУ; редкол.: И.В. Гайшун [и др.]. - Минск, 2005. - Ч. 1. - С. 321-327.
4. Fetisova, S. On the Newtonian deltoid problem/ S. Fetisova, E.A. Grebenikov// Computer Algebra Systems in Teaching and Research: proc. of the 4th International Workshop CASTR'2007, Siedlce, Poland, Jan. 31 - Feb. 3, 2007/ University of Podlasie; Eds.: L. Gadomski [and others].- Siedlce, 2007.- P.112-116.
5. Фетисова, С.А. Об устойчивости дельтоидной конфигурации четырех тел / С.А. Фетисова // Инновационные технологии управления в экономике'2007: материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 24-25 апр. 2007 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина; под общ. ред. канд. физ.-мат. наук С.А. Тузика; редкол.: В.Я. Асанович [и др.]. – Брест, 2007. – С.152.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ СЕТОЧНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А.П. Худяков, В.М. Мадорский
Брестский государственный университет им. А.С.Пушкина, г. Брест

При решении краевых задач разностными методами получается достаточно точный каркас решения, так как мы можем использовать большое число точек аппроксимации производных по методу МНК. Второй важной проблемой на пути решения задачи является процедура восстановления сеточного решения. Хорошо известным методом восстановления периодического решения является аппроксимация отрезком ряда Фурье. Рассмотрим еще один алгоритм восстановления сеточного решения. Назовем его методом наименьших квадратов на базе периодических функций. В качестве тестовой рассмотрим одну из основных задач теории нелинейных колебаний – задачу Дуффинга.

$$y''(x) + 0.2y'(x) + y(x) + y^3(x) = 50\cos(x).$$

Пусть искомую (b-a)-периодическую функцию $y(x)$ требуется аппроксимировать на отрезке $[a;b]$ по системе точек $\{x_i, f(x_i)\},\ i=\overline{0,n}$. Приближенную функцию будем искать в следующем виде:

$$P_m(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}\left(A_k \cos\left(2\pi k\frac{x-a}{b-a}\right) + B_k \sin\left(2\pi k\frac{x-a}{b-a}\right)\right),\ x\in[a,b]. \qquad (1)$$

Потребуем, чтобы функция (1) максимально близко в некоторой норме функционального пространства проходила через заданную систему точек, то-есть потребуем выполнения следующего условия:

$$I = I(A_0, A_1,..., A_m, B_1,..., B_m) = \sum_{i=0}^{n}(P_m(x_i) - y(x_i))^2 \to \min. \qquad (2)$$

Найдя частные производные $\frac{\partial I}{\partial A_0}, \frac{\partial I}{\partial A_1},..., \frac{\partial I}{\partial A_m}, \frac{\partial I}{\partial B_1},..., \frac{\partial I}{\partial B_m}$ и приравняв их к нулю, стандартным образом из системы (3) находим нужные коэффициенты.

$$\frac{\partial I}{\partial A_l} = 2\sum_{j=0}^{n}\left[\left(A_0 + \sum_{i=1}^{m}\left[A_i \cos\left(2\pi ik\frac{x_j - a}{b-a}\right) + B_i \sin\left(2\pi ik\frac{x_j - a}{b-a}\right)\right] - y_j\right)\cos\left(2\pi l\frac{x_j - a}{b-a}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial B_l} = 2\sum_{j=0}^{n}\left[\left(A_0 + \sum_{i=1}^{m}\left[A_i \cos\left(2\pi ik\frac{x_j - a}{b-a}\right) + \right.\right.\right. \quad (3)$$

$$\left.\left.\left. + B_i \sin\left(2\pi ik\frac{x_j - a}{b-a}\right)\right] - y_j\right)\sin\left(2\pi l\frac{x_j - a}{b-a}\right)\right] = 0, \quad l = \overline{0,m}.$$

Результаты численного эксперимента сведены в таблицу 1.

Таблица 1 (Точность при восстановлении периодической задачи Дуффинга)

Вид Аппр-ии	Число точек разбиения отрезка				
	256	300	384	456	512
Отрезок тригонометрического ряда Фурье					
	3.5138E-11	2.0712E-12	8.7048E-13	2.2824E-12	2.2187E-12
Метод наименьших квадратов					
	3.5145E-11	2.0023E-12	2.0246E-14	3.5711E-15	3.1374E-15

Анализ таблицы 1 позволяет утверждать, что в случае аппроксимации приближенного решения периодической задачи Дуффинга отрезком тригонометрического ряда Фурье точность приближения с увеличением числа точек разбиения практически не возрастает, оставаясь на уровне 1e-12 – 2e-12.

В случае метода наименьших квадратов с ростом числа точек разбиения точность по норме невязки растет и доходит до 3.57e-15 при 456 точках разбиения. Дальнейшее увеличение числа точек разбиения практически не улучшает точность в связи с накоплением погрешностей округления. Из таблицы 1 видно, что использование метода наименьших квадратов является более приемлемым.

За рамками данной статьи остается вопрос о порядке тригонометрического полинома и полинома, построенного по методу наименьших квадратов.

Обычно порядок тригонометрического полинома берется вдвое низшим, чем число точек аппроксимации. В случае метода наименьших квадратов, эта зависимость не такая простая.

Вычислительная практика показывает, что порядок аппроксимационного полинома в случае метода наименьших квадратов примерно втрое меньше числа точек аппроксимации и наилучший порядок обычно находят опытным путем.

В рассматриваемом случае для периодической задачи Дуффинга при применении метода наименьших квадратов получено, что наилучшая степень приближающего полинома равна 125.

Далее сеточным методом решалась непериодическая задача Дуффинга для получения каркаса приближенного решения. Получающаяся при этом система нелинейных численных уравнений решалась одним из нелокальных квазиньютоновских методов [3].

Результат восстановления сеточного решения непериодической задачи описывается таблицей 2.

Таблица 2 (Точность при восстановлении непериодической задачи)

Вид Аппр-ии	Число точек разбиения отрезка				
	256	300	384	456	512
Отрезок ряда Фурье по полиномам Чебышёва I рода					
	1.28285E-7	1.82592E-8	1.15643E-7	1.46563E-7	1.08978E-7
Сплайн 3-ей степени					
	1.3251518	1.2245737	1.0828981	0.9939964	0.9382021
Непериодический сплайн 5-й степени					
	0.0001570	8.22059E-5	3.02152E-5	1.51024E-5	9.47321E-6

В случае непериодической задачи наилучшим алгоритмом аппроксимации является отрезок ряда Фурье по полиномам Чебышева I рода, однако в этом случае сетка должна состоять из корней полинома Чебышева, что не всегда удобно. К тому же итерационные процессы на неравномерной сетке работают хуже и достигают точности на 2-3 порядка ниже, чем при решении задачи на равномерной сетке.

Данная ситуация натолкнула на мысль построения периодического продолжения каркаса решения на расширенном отрезке, например, [*a*;*b*+*l*]. Сделать это можно следующим способом.

На начальном этапе решаем непериодическую задачу на равномерной сетке. Затем требуем, чтобы решение $y(x)$ было периодическим на отрезке [*a*;*b*+*l*]. Используя точки каркаса решения, близкие к концам отрезка [*a*;*b*], с помощью метода неопределенных коэффициентов можно численно найти приближенные значения производных любого порядка в точках $x=a$ и $x=b$. Продолжение решения на отрезке [*b*;*b*+*l*] ищем в виде полинома $P_m(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$. Неизвестные коэффициенты a_i находятся из условий:

$$\begin{aligned} &P_m(b)=\tilde{y}(b), \quad P_m(b+l)=\tilde{y}(a), \\ &P_m^{(k)}(b)=\tilde{y}^{(k)}(b), \quad P_m^{(k)}(b+l)=\tilde{y}^{(k)}(a), \quad k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}, \quad m\in 2N \end{aligned} \tag{4}$$

где $\tilde{y}^{(k)}(x)$ - производные, вычисленные по МНК.

Соотношение (4) представляет собой линейную систему размерности m+1, которую можно решить, например, методом Гаусса.

Далее расширяем равномерную сетку на отрезок [*a*;*b*+*l*] и находим значения функции в новых узлах, используя полином $P_m(x)$.

В результате этих действий получим новый каркас решения, заданный на равномерной сетке на отрезке [*a*;*b*+*l*], удовлетворяющий условию периодичности на данном отрезке. Данное решение можно восстановить тригонометрическим рядом Фурье или методом наименьших квадратов.

В таблице 3 приведён результат реализации данного подхода, где в ячейках таблицы указана точность восстановления.

Наилучшие результаты получились при следующих параметрах:

- степень полинома M = 16,
- расширенный отрезок $\left[0;2\pi\left(1+\frac{150}{N}\right)\right]$,

где N – количество точек разбиения отрезка $[0,2\pi]$.

Таблица 3 (Точность при построении периодического продолжения)

Число точек разбиения отрезка				
256	300	384	456	512
9.1508676E-8	1.7728201E-8	4.1369668E-9	1.1210818E-9	1.4308642E-8

Преимущество предложенного подхода очевидно: во-первых, степень приближающего полинома достаточно низкая, во-вторых, из таблицы видно, что восстановленное решение, построенное изложенным выше способом, точнее, чем при использовании полиномов Чебышева без периодического продолжения.

Подводя итоги вышесказанному, можно сделать вывод о том, что при решении задачи Дуффинга, как одной из важных задач теории нелинейных колебаний, если речь идет о периодическом случае, целесообразнее в качестве аппроксимации полученного приближенного решения разностным методом, использовать метод наименьших квадратов. В случае непериодической задачи Дуффинга при решении ее разностным методом, разумнее наряду с аппроксимацией полиномами Чебышева I рода использовать периодическое продолжение с дальнейшим восстановлением сеточного решения рядами Фурье.

При решении задачи Дуффинга одним из проекционных методов приближенное решение получается в аналитическом виде, что позволяет избежать процедуры аппроксимации, на этапе которой теряется 3 – 4 порядка точности по норме невязки. Дальнейшие наши исследования будут проходить в этой области. Наибольшие трудности, как нам представляется, ожидают нас при определении системы базисных функций, и процедуры уточнения полученных последовательностей приближенных решений.

Литература

1. Березин, И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. М.:Наука, 1966.-Т.1.-632 с.
2. Натансон, И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. М.: 1949.-688 с.
3. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские методы решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. - Брест. 2005. – 180 с.

О НОРМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА, РЕШЕНИЯ КОТОРЫХ ОБЛАДАЮТ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Швычкина Е. Н.
Брестский государственный технический университет, г. Брест

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_1}{dz}=\frac{\sum\limits_{\tau_2,\tau_3=0}^{\tau_2+\tau_3=p^{(1)}-p_{11}} P^{(1)}_{\tau_2,\tau_3} x_1^{p_{11}} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}}{\sum\limits_{\tau_2,\tau_3=0}^{\tau_2+\tau_3=q^{(1)}-q_{11}} Q^{(1)}_{\tau_2,\tau_3} x_1^{q_{11}} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}},\quad \frac{dx_j}{dz}=\frac{\sum\limits_{\tau_1,\tau_2,\tau_3=0}^{p_{j1},p_{j2},p_{j3}} P^{(j)}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}}{\sum\limits_{\tau_1,\tau_2,\tau_3=0}^{q_{j1},q_{j2},q_{j3}} Q^{(j)}_{\tau_1,\tau_2,\tau_3} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}} \qquad (1)$$

$(j=2,3)$, $x_1(z)$, $x_2(z)$, $x_3(z)$ – искомые функции, z – независимая комплекснозначная переменная; p_{ik} ,q_{ik} $(i,\ k=1,2,3)$ – целые неотрицательные числа, причем $p_{i1}+p_{i2}+p_{i3}\equiv p^{(i)}$, $q_{i1}+q_{i2}+ q_{i3}\equiv q^{(i)}$.

Для системы (1) ищутся решения $x_i=x_i(z)$ $(i=1,2,3)$, обладающие бесконечными предельными свойствами

$$x_i\to\infty \ (i=1,2,3) \text{ при } z\to z_0 \qquad (2)$$

с помощью метода, основанного на использовании теоремы Коши и замены

$$x_1=\frac{1}{u^{\alpha}},\ x_2=\frac{V_2}{u^{\mu_2}},\ x_3=\frac{V_3}{u^{\mu_3}}, \qquad (3)$$

где $\alpha,\ \mu_2,\ \mu_3$ натуральные числа, которые получаются как решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=2}^{n}\mu_k(p_{k1}-q_{k1})+\alpha(p_{11}-q_{11}-1)=1, \\ \sum\limits_{\substack{k=2\\ k\neq j}}^{n}\mu_k(p_{kj}-q_{kj})+\mu_j(p_{jj}-q_{jj}-1)+\alpha(p_{j1}-q_{j1})=1 \quad j=(2,...,n). \end{cases} \qquad (4)$$