

сдвига в контактном шве сборно-монолитной конструкции на стадии изготовления, возникающие в результате разности усадочных деформаций монолитного и сборного бетонов, а также собственного веса конструкции (рис. 3).

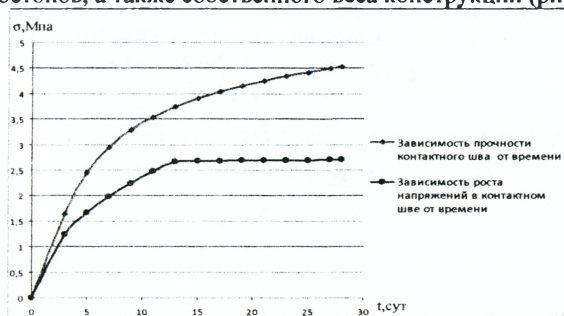


Рисунок 3 – Сопоставление полученных результатов

Полученные результаты проведённых исследований свидетельствуют о том, что прочность контактного шва от действия нагрузок в процессе твердения монолитного бетона обеспечена (прочность шва больше действующих касательных напряжений в среднем на 27%). В связи с этим можно утверждать, что усадочные деформации монолитного бетона передаются на сборную балку, тем самым влияя на напряженно-деформированное состояние всей конструкции. Однако остаётся нераскрытым вопрос о степени влияния данных деформаций на напряженно-деформированное состояние конструкции на стадии эксплуатации, что требует проведения дополнительных исследований.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Чикалина, О.П. Усиление железобетонных конструкций намоноличиванием с применением модифицированных бетонов: магистерская диссер., 2003.
2. Гольшев, А.Б. Расчёт сборно-монолитных конструкций с учётом фактора времени / А.Б. Гольшев, В.П. Полищук, Ю.А. Колпаков. – М., 1969.
3. Современные строительные технологии [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://parthenon-house.ru/content/articles/index.php?article=7649> – Дата доступа: 14.02.2014.
4. Тур, В.В. Прочность и деформации бетона в расчетах конструкций: монография / В.В. Тур, Н.А. Рак. – Брест, 2003.

УДК 681.3:519.3

Игнатюк В.И., Калита Р.О.

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В последние годы одним из основных и наиболее мощных инструментов численного исследования напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений при действии различных нагрузок и воздействий является метод конечных элементов (МКЭ) [1, 2], использование которого невозможно без современной компьютерной техники и соответствующих компьютерных программ, реализующих этот метод.

Рассматривается статический расчет плоских стержневых систем методом конечных элементов с учетом упругой податливости узловых соединений. Для расчета принят МКЭ в форме метода перемещений, где основными неизвестными являются перемещения узлов соединения конечных элементов между собой.

Разрешающие уравнения метода конечных элементов записываются в виде [1]:

$$[E_i] \cdot \{-[K] \cdot \{\Delta\} + \{P\}\} = 0, \quad (1)$$

где $\{P\}$ – вектор действующих в узлах системы внешних нагрузок; $\{\Delta\}$ – вектор перемещений узлов системы; $[K]$ – матрица жесткости системы, имеющая вид:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Элемент матрицы жесткости k_{mj} представляет собой реакцию в m -м направлении (величину реакции r_m) от смещения узла в j -м направлении на единичную величину. Смещение узла в некотором направлении вызывает деформации всех примыкающих к этому узлу стержней, и соответственно величина возникающей в этом узле реакции должна включать реакции от всех этих стержней. Поэтому коэффициент k_{mj} вычисляют, задавая смещением $\Delta_j = 1$ и суммируя реакции от всех элементов, примыкающих к узлу i_m , к которому относится m -е направление реакции (и перемещения) – $k_{mj} = \sum_{i_m} r_{mj}^*$, где i_m – номер узла, к которому относится m -е направление реакции. Величины k_{mj} и r_{mj}^* определяются в общей системе координат.

$[E_i]$ – диагональная матрица, которая, по существу, формирует разрешающую систему уравнений для определения перемещений узлов, в которой число элементов по диагонали равно числу элементов вектора $\{\Delta\}$, причем каждому диагональному элементу матрицы $[E_i]$ соответствует узел и направление его перемещения в том же порядке, как и в матрице $\{\Delta\}$. Диагональные элементы матрицы $[E_i]$ могут принимать два значения – 0 либо 1. Единице принимаются равными элементы, которые по своему порядковому номеру соответствуют направлениям в узлах, по которым могут происходить перемещения узлов; нулю равны элементы, которые соответствуют перемещениям узлов в направлениях, в которых эти перемещения вследствие наличия опорных связей отсутствуют.

Матрица жесткости системы может быть сформирована из матриц жесткости КЭ в глобальной системе $[K_s]$ координат путем их наложения в соответствии со структурой расчетной дискретной модели системы [1]. Матрицы жесткости КЭ в глобальной системе координат $[K_s]$ получаются из матриц жесткости КЭ в локальной системе координат $[K'_s]$:

$$[K_s] = [T_{\alpha}]^T [K'_s] [T_{\alpha}], \quad (3)$$

где $[T_{\alpha}]$ – матрица преобразования координат КЭ, имеющая вид:

$$[T_{\alpha}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4)$$

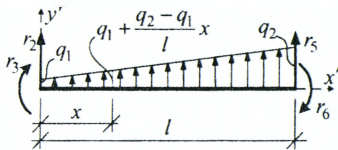
Решение системы уравнений (1) позволяет определить перемещения узлов системы, зная которые, можно найти усилия в узловых точках каждого из конечных элементов (КЭ), используя зависимость [1]:

$$\{r_i\} = [K'_i][T_{\alpha_i}]\{\Delta_i\} - \{P'_{qi}\}, \quad (5)$$

где $[K'_i]$ – матрица жесткости КЭ в локальной системе координат; $\{\Delta_i\}$ – матрица перемещений концов КЭ в глобальной системе координат, равных (на основе условия неразрывности деформаций) соответствующим перемещениям узлов системы; $\{P'_{qi}\}$ – матрица узловых нагрузок стержневого КЭ в локальной системе координат, имеющих место при действии на КЭ распределенных нагрузок.

Зная величины усилий по концам конечных элементов и закономерности изменения внутренних сил в пределах стержневых конечных элементов, несложно построить эпюры этих усилий в каждом из конечных элементов и соответственно во всей системе.

Выражения для перемещений можно получить на основе дифференциальных зависимостей. Например, для конечного элемента, на который действует нагрузка, распределенная по трапециoidalному закону (рис. 1), для поперечных перемещений будем иметь выражение



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left(r_3 + r_2 x + \frac{q_1}{2} x^2 + \frac{q_2 - q_1}{6l} x^3 \right),$$

принтегрировав которое два раза и учитывая

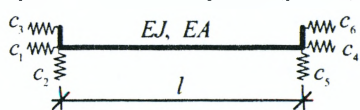
граничные условия (при $x=0$ – $y = \delta_2$, $\frac{dy}{dx} = -\delta_3$),

получим:

$$\text{Рисунок 1} \quad u_2 = y = \delta_2 - \delta_3 x + \frac{1}{EJ} \left(r_3 \frac{x^2}{2} + r_2 \frac{x^3}{6} + \frac{q_1 x^4}{24} + \frac{q_2 - q_1}{120l} x^5 \right); \quad u_3 = \varphi = \frac{du_2}{dx}. \quad (6)$$

Отметим, что выражения (4) представляют собой перемещения сечений КЭ в местной системе координат. Для перевода их в общую систему координат необходимо выполнить соответствующие преобразования.

Для учёта в расчётах сооружений упругой податливости в узловых соединениях получены матрицы жесткости КЭ для плоских стержневых систем, учитывающие упруго-податливое присоединение КЭ к узлам по всем направлениям сопряжения, т.е. во всех угловых и линейных связях, с помощью которых КЭ присоединяются к узлам (рис. 2) – горизонтальных (c_1, c_4), вертикальных (c_2, c_5)



и угловых (c_3, c_6), где c_i – упругая податливость связи, равная величине ее смещения (линейного либо углового) при приложении к ней единичного усилия.

Рисунок 2

Матрица жесткости конечного элемента (рис. 1), упруго-податливо присоединенного по концам к узлам, в местной системе координат имеет вид:

$$[K'_3] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} k_1 & -\frac{6EJ}{l^2} k_2 & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} k_1 & -\frac{6EJ}{l^2} k_4 \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} k_2 & \frac{3EJ}{l} (k_2 + k_3) & 0 & \frac{6EJ}{l^2} k_2 & \frac{3EJ}{l} (k_2 - k_3) \\ -\frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 & \frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} k_1 & \frac{6EJ}{l^2} k_2 & 0 & \frac{12EJ}{l^3} k_1 & \frac{6EJ}{l^2} k_4 \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} k_4 & \frac{3EJ}{l} (k_2 - k_3) & 0 & \frac{6EJ}{l^2} k_4 & \frac{3EJ}{l} (k_4 + k_5) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

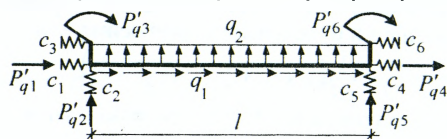
где обозначено:

$$k_N = \frac{1}{1 + (c_1 + c_4) \frac{EA}{l}}; \quad k_1 = \frac{t_4}{t_2 t_4 - 3t_3^2}; \quad k_2 = \frac{t_3 + t_4}{t_2 t_4 - 3t_3^2}; \quad k_3 = \frac{1}{3t_4} + \frac{t_3}{t_4} k_2; \quad k_4 = \frac{t_4 - t_3}{t_2 t_4 - 3t_3^2};$$

$$k_5 = \frac{1}{3t_4} + \frac{t_3}{t_4} k_4; \quad t_2 = 1 + (c_2 + c_5) \frac{12EJ}{l^3} + (c_3 + c_6) \frac{3EJ}{l}; \quad t_3 = (c_6 - c_3) \frac{EJ}{l}; \quad t_4 = 1 + (c_3 + c_6) \frac{EJ}{l}.$$

Преобразование распределённых нагрузок для КЭ, упруго-податливо присоединяемых к узлам, к узловым нагрузкам определяется зависимостями, полученными авторами:

а) загрузка КЭ равномерно распределёнными нагрузками:

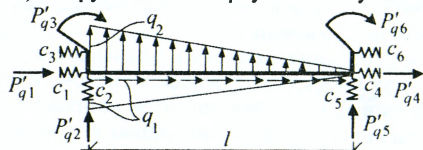


$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_2 l}{2} f_{q1} \\ \frac{q_2 l}{2} (1 - f_{q2}) \\ -\frac{q_2 l^2}{12} (1.5 - 3f_{q2} - f_{q3}) \\ \frac{q_2 l}{2} f_{q1} \\ \frac{q_2 l}{2} (1 + f_{q2}) \\ \frac{q_2 l^2}{12} (1.5 + 3f_{q2} - f_{q3}) \end{Bmatrix}$$

где: $f_{q2} = \frac{3 t_2 t_4 - t_3^2}{6 t_3^2 - 2 t_2 t_4}; \quad f_{q3} = 3 f_{q2} \frac{t_3}{t_4} + \frac{t_3^3}{2 t_4};$

$$t_2 = \frac{EJ}{l} (c_6 - c_3) + \frac{8EJ}{l^3} (c_5 - c_2); \quad t_3 = 1 + \frac{3EJ}{l} (c_3 + c_6);$$

б) загрузка КЭ треугольной убывающей нагрузкой:



$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{6} (3 - s_{q1}) \\ \frac{q_2 l}{20} (10 - u_{q1}) \\ -\frac{q_2 l^2}{120} (20 + u_{q2} - 6u_{q1}) \\ \frac{q_1 l}{6} s_{q1} \\ \frac{q_2 l}{20} u_{q1} \\ \frac{q_2 l^2}{120} u_{q2} \end{Bmatrix}$$

где: $u_{q1} = \frac{8 s_{q2} u_3 - 5 s_{q3} u_2}{4 u_1 u_3 - 3 u_2^2}; \quad u_{q2} = \frac{3 u_2 u_{q1} - 5 s_{q3}}{u_3};$

$$u_1 = \frac{1}{f_2}; \quad u_2 = 1 + \frac{2EJ}{l} c_3; \quad u_3 = 1 + (c_3 + c_6) \frac{EJ}{l};$$

$$s_{q2} = 1 + c_2 \frac{15EJ}{l^3}; \quad s_{q3} = 1 + \frac{4EJ}{l} c_3.$$

Нагрузки, распределённые по трапецидальным зависимостям, могут быть приведены к узловым путем комбинирования представленных выше зависимостей.

Алгоритм расчета стержневых систем методом конечных элементов в форме метода перемещений может быть следующим:

1. Определение расчетной дискретной модели заданной стержневой системы (разделение ее на конечные элементы, назначение узлов) и описание ее структуры (нумерация узлов и стержней, определение их числа).

2. Выбор глобальной и локальных систем координат и определение координат узлов в глобальной системе координат.

3. Составление матрицы перемещений узлов расчетной дискретной модели заданной системы $\{\Delta\}$.

4. Идентификация конечных элементов (определение их типов, длин l_i , жесткостей EA_i и EJ_i и установление соответствия между номерами стержней и номерами начального и конечного узлов для этих стержней).

5. Преобразование внешних нагрузок (преобразование пролетных равномерно распределенных нагрузок на стержни к узловым нагрузкам, преобразование сосредоточенных узловых сил из местных систем в общую систему координат, определение суммарных узловых сил в каждом узле дискретной модели).

6. Построение матриц жесткости КЭ $[K'_i]$ в локальных системах координат (7).

7. Определение для каждого конечного элемента направляющих синусов и косинусов ($\sin \alpha_i$ и $\cos \alpha_i$) и составление матриц преобразования координат КЭ $[T_{\alpha_i}]$ (4).

8. Получение матриц жесткости элементов $[K_i]$ в глобальной системе координат (3).

9. Формирование матрицы жесткости $[K]$ всей системы в глобальной системе координат (2).

10. Получение системы разрешающих уравнений путем учета граничных условий (формирование матрицы $[E_i]$).

11. Решение системы разрешающих уравнений (1) и определение узловых перемещений $\{\Delta\}$ расчетной модели МКЭ.

12. Определение узловых усилий $\{r_i\}$ для конечных элементов (5).

13. Определение усилий и перемещений в конечных элементах, построение эпюр внутренних сил в системе, определение деформированного вида системы (6).

На основе полученной методики и алгоритма расчета разработана компьютерная программа расчета плоских стержневых систем на статические нагрузки. Программа составлена в среде программирования Delphi 7 с применением объектно-ориентированной модели программирования [3], работает под управлением Windows XP и выше, не требует специальной установки на компьютер и дополнительных библиотек, стандартный для Windows графический интерфейс и достаточно развитый сервис делают работу в программе простой и понятной. Исполняемый файл программы имеет размер 1.1 Мб.

Важными достоинствами программы являются возможности:

- учета упругой податливости присоединения стержней к узлам;
- приложения к системам не только сосредоточенных сил и равномерно распределенных нагрузок, но и нагрузок, распределенных по треугольной и трапецидальной зависимостям;
- практически неограниченное число узлов и стержней системы (определяется ресурсами компьютера);
- группового выделения узлов или стержней с целью одновременного изменения их характеристик (координат, нагрузок, жесткостей);

- анализа расчетных схем на изменяемость;
- масштабирования и перемещения графических объектов;
- удобного представления исходных данных и результатов расчета в таблицах (формат чисел, размеры ячеек, шрифты, выравнивание);
- просмотра для каждого узла, стержня и для системы в целом любой матрицы, используемой в процессе решения.

Программа имеет «Помощь», содержащую краткие сведения о методе расчета и информацию о работе в программе и с программой.

Основное окно программы, открывающееся при ее запуске, содержит меню, в котором представлены все основные инструменты работы с программой (рис. 3), включая:

- меню «Файл» (Создать, Открыть, Сохранить, Сохранить как..., Выход);
- меню «Вид», позволяющее менять вид расчетных схем (шрифт, масштабирование, перемещение), вид таблиц (шрифт, размер ячеек, форматы представления чисел и их расположение в ячейках) и включающее также команды – «Что показывать» (то есть показывать или нет на расчетных схемах номера узлов, стержней, координаты узлов, опоры, нагрузки, базисы, типы жесткостей стержней), «Масштабы»;
- меню «Ввод и корректировка данных», позволяющее создавать узлы и стержни, редактировать и удалять их, а также задавать загрузки и типы жесткостей;
- меню «Расчет», производящее расчет заданной схемы;
- меню «Результаты», содержащее команды – «Эпюры», «Таблица перемещений», «Таблица усилий»;

Многие из указанных команд открывают свои окна со своими наборами функций и команд, для удобства большинство команд дублируется на панели инструментов.

Ввод исходных данных производится в основном окне программы с помощью «Конструктора системы» (рис. 3).

Узлы задаются в окне «Узлы» (рис. 3). Стержни задаются с помощью мыши путем засечек (щелчков мыши) в начальном и конечном узлах.

Характеристики узлов и стержней могут изменяться при выделении соответствующего узла либо стержня, либо группы их с помощью их редакторов (рис. 3).

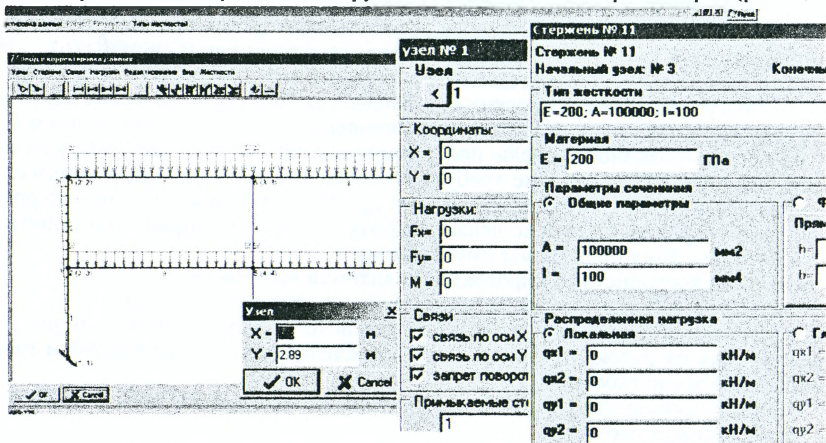


Рисунок 3 – Основное окно программы, окно ввода и корректировки данных, окна ввода и редактирования узлов и стержней

После запуска программы на расчет она проверяет систему на изменяемость и выполняет расчет сооружения. Результаты расчета можно получить как в графическом виде – в виде эпюр усилий, схем деформаций системы (рис. 4), так и в табличном виде.

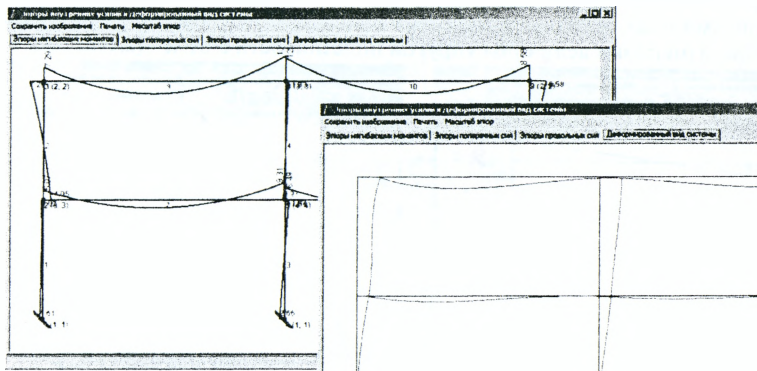


Рисунок 4 – Результаты расчета. Эпюра М. Схема деформаций системы

Выполним расчет и анализ результатов для рамы, изображенной на рис. 5, в которой

стержень 1 присоединен к узлам 2 и 3 упруго-податливо. Результаты расчетов представлены на рис. 6, где показано изменение величин изгибающих моментов в узлах рамы при изменении значений упругой податливости присоединения стержня 1 к узлам 2 и 3.

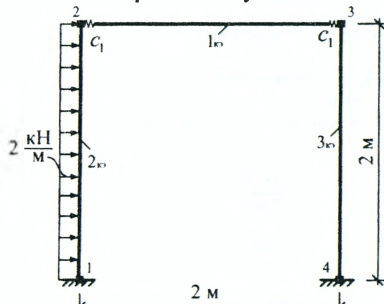
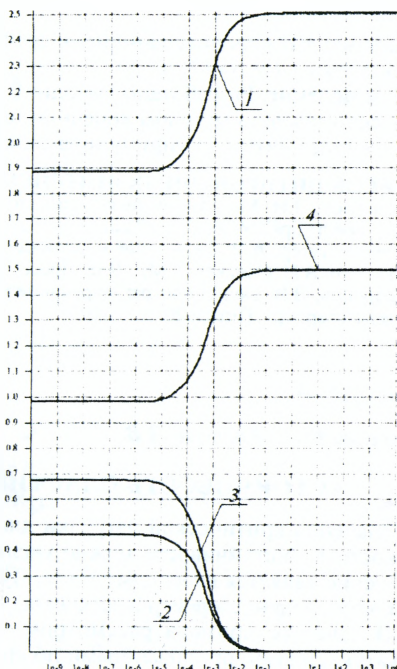


Рисунок 5 – Расчетная схема рамы

Рисунок 6 – Влияние упругой податливости присоединения стержня 1 к узлам 2 и 3 на величины изгибающих моментов в узлах 1, 2, 3 и 4



На основании построенных зависимостей можно сделать вывод, что наибольшее изменение величин изгибающих моментов происходит при изменении значений упругой податливости c в пределах от $1e^{-6}$ (кН·м)⁻¹ до $1e^{-1}$ (кН·м)⁻¹. При величине упругой податливости от нуля до $1e^{-6}$ (кН·м)⁻¹ изгибающие моменты остаются постоянными и соответствуют жесткому присоединению 1-го стержня к узлам (рис. 7). При изменении величины упругой податливости c от $1e^{-1}$ (кН·м)⁻¹ до ∞

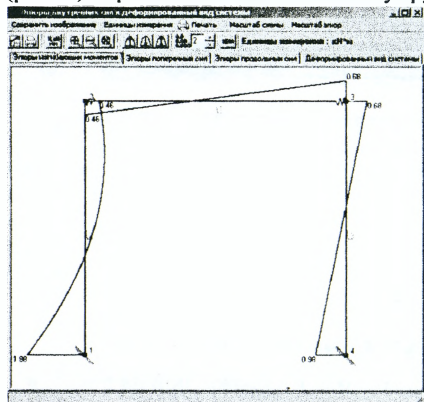


Рисунок 7 – Эпюра M при $c = 1e^{-6}$ (кН·м)⁻¹

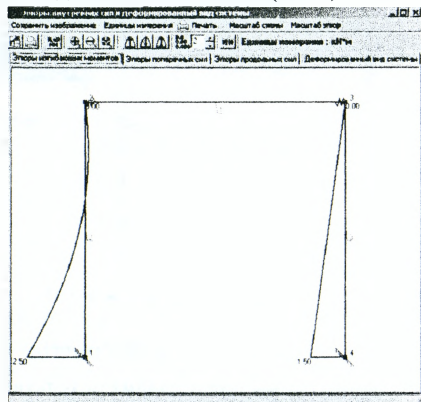


Рисунок 8 – Эпюра M при $c = 1e^{-1}$ (кН·м)⁻¹

величины изгибающих моментов соответствуют шарнирному присоединению 1-го стержня к узлам (рис. 8).

Заключение. Разработаны методика, алгоритм и компьютерная программа статического расчета методом конечных элементов плоских стержневых систем, позволяющие учитывать упруго-податливое присоединение стержней к узлам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Игнатюк, В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие. – Брест: БрГТУ, 2007. – 172 с.
2. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
3. Фаронов, В.В. Delphi программирование на языке высокого уровня: учебник для вузов. – Санкт-Петербург: Питер, 2010. – 640 с.

УДК 624.04

Киселев В.Н., Косенок В.В.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ

Значения критической нагрузки для пластин зависят от цилиндрической жесткости D . Устойчивость можно увеличить, делая пластину толще. Однако это решение является неэкономичным. Лучшим решением является увеличение жесткости введением ребер жесткости.

В качестве примера рассмотрим пластину со свободно опертыми краями, сжатую силами, приложенными по краям $x=0$ и $x=a$. Пластина подкреплена од-