В.В. Калмыченко, А.В. Чичурин
Брест, УО «БрГУ им. А.С. Пушкина»

О СЕМЕЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШАЗИ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Исследуя уравнение

$$w'''=\sum_{k=1}^{6}\frac{(w'-a_k')(w''-a_k'')+A_k(w'-a_k')^3+B_k(w'-a_k')^2+C_k(w'-a_k')}{w-a_k}+D\,w''+$$

$$+E\,w'+\prod_{i=1}^{6}(w-a_i)\sum_{k=1}^{6}\frac{F_k}{w-a_k} \qquad (1)$$

Шази показал [1], что некоторые случаи вырождения уравнения (1) являются уравнениями Пенлеве и, следовательно, уравнение (1) может быть рассмотрено как существенно новое [2]. В работах [3, 4] были приведены коэффициентные соотношения при выполнении которых уравнение (1) имеет двухпараметрическое семейство решений, представляющее собой общее решение некоторого уравнения второго порядка с тремя и двумя полюсами. В данной работе покажем, что уравнение (1) при постоянных величинах a_k $(k=\overline{1,6})$ имеет также семейство решений отличное от семейств решений, приведенных в [3, 4].

Согласно [3], уравнение (1) при постоянных величинах a_k $(k=\overline{1,6})$ может быть сведено к линейному уравнению с шестью особыми точками

$$\frac{d^2y}{dw^2}=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}\frac{dy}{dw}-2\sum_{k=1}^{6}\frac{y}{a_k(w-a_k)}+2\,E\left(1+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{6}\frac{a_k}{w-a_k}\right) \qquad (2)$$

посредством замены

$$\frac{dw}{dz}=\eta,\;\; \eta^2=y \qquad (3)$$

Для того, чтобы проинтегрировать уравнение (2) достаточно проинтегрировать соответствующее однородное уравнение

$$\frac{d^2y}{dw^2}-\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{w-a_k}\frac{dy}{dw}+2\sum_{k=1}^{6}\frac{y}{a_k(w-a_k)}=0. \qquad (4)$$

Уравнение (4) может быть также переписано в более удобном виде

$$y''-\frac{6x^5+4\sigma_2x^3-3\sigma_3x^2+2\sigma_4x}{x^6+\sigma_2x^4-\sigma_3x^3+\sigma_4x^2+\sigma_6}y'+2\,\frac{6x^4+4\sigma_2x^2-3\sigma_3x+2\sigma_4}{x^6+\sigma_2x^4-\sigma_3x^3+\sigma_4x^2+\sigma_6}y=0, \qquad (5)$$

где $x\equiv w$, σ_i $(i=2,3,4,6)$ – элементарные симметрические многочлены, составленные из элементов a_k $(k=\overline{1,6})$ (здесь мы учли соотношения $\sigma_1=\sigma_5=0$ [3, 5]).

Будем искать для уравнения (5) однопараметрические семейства решений в форме общего решения уравнения Риккати

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \tag{6}$$

где $a(x), b(x), c(x)$ – некоторые функции подлежащие определению. Подставляя (6) в (5) и приравнивая коэффициент при y^3 в получившемся уравнении (которое не будем приводить из-за громоздкости и которое обозначим через *(A)*) к нулю, получим $a(x) = 0$. Учитывая последнее равенство, коэффициент при y^2 в уравнении *(A)* обратится в нуль. Приравнивая коэффициент при y в уравнении *(A)* нулю, получим уравнение для определения функции $b(x)$

$$b' + b^2 - \frac{6x^5 + 4\sigma_2 x^3 - 3\sigma_3 x^2 + 2\sigma_4 x}{x^6 + \sigma_2 x^4 - \sigma_3 x^3 + \sigma_4 x^2 + \sigma_6} b + \frac{12x^4 + 8\sigma_2 x^2 - 6\sigma_3 x + 4\sigma_4 x}{x^6 + \sigma_2 x^4 - \sigma_3 x^3 + \sigma_4 x^2 + \sigma_6} = 0. \tag{7}$$

Приравнивая коэффициент при y^0 в уравнении *(A)* нулю, получим уравнение для определения функции $c(x)$

$$c' + bc = \frac{6x^5 + 4\sigma_2 x^3 - 3\sigma_3 x^2 + 2\sigma_4 x}{x^6 + \sigma_2 x^4 - \sigma_3 x^3 + \sigma_4 x^2 + \sigma_6} c. \tag{8}$$

Уравнение (7) является уравнением Риккати относительно неизвестной функции $b(x)$. Введем обозначения

$$\varphi(x) \equiv x^6 + \sigma_2 x^4 - \sigma_3 x^3 + \sigma_4 x^2 + \sigma_6, \quad \psi(x) \equiv 12x^4 + 8\sigma_2 x^2 - 6\sigma_3 x + 4\sigma_4. \tag{9}$$

Учитывая обозначения (9), уравнение (7) можно переписать в более компактном виде

$$\varphi b' - b\varphi' + \varphi b^2 + \psi = 0. \tag{10}$$

постоянные. Уравнение (10) можно далее упростить. Для этого введем замену

$$u = \frac{b}{\varphi}. \tag{11}$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$u' + \varphi u^2 + \psi = 0. \tag{12}$$

Перейдем к исследованию уравнения (8). С учетом обозначений (9) оно может быть переписано в виде

$$\varphi c' + (\varphi b - \varphi')c = 0. \tag{13}$$

Интегрируя уравнение (13), найдем

$$c = C_1 \varphi \exp\left(-\int b dx\right), \tag{14}$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Таким образом, имеет место

Теорема. Линейное уравнение с шестью особыми точками вида (4) имеет семейство решений вида

$$y' = b(x)y + c(x),$$

где функция $b(x)$ определяются как решение уравнения Риккати (10), (9), а функция $c(x)$ согласно формуле (14).

Обозначим частное решение уравнения (4) через y_1. Тогда (см. напр. [6]), общее решение уравнения (2) имеет вид

$$y = \xi(w)y_1 + y_2 \int h(w)e^F y_1 dw - y_1 \int h(w)e^F y_2 dw, \qquad (15)$$

где

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-F}}{y_1^2} dw, \quad h(w) \equiv 2E\left(1 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{6} \frac{a_k}{w - a_k}\right),$$

$F \equiv \int p(w)dw, \quad p(w) = -\dfrac{6w^5 + 4\sigma_2 w^3 - 3\sigma_3 w^2 + 2\sigma_4 w}{w^6 + \sigma_2 w^4 - \sigma_3 w^3 + \sigma_4 w^2 + \sigma_6}, \quad w \equiv x$. Здесь y_2 – второе частное решение уравнения (4), линейно независимое с y_1.

Общее решение уравнения (2), согласно замене (3), запишем в виде

$$\int \frac{dw}{\sqrt{y(w)}} = z + C \ ,$$

где $y(w)$ определяется согласно соотношению (15), C – произвольная постоянная.

1. Chazy J. // Acta Math. 1911. Vol. 34. P. 317-385. 2. Добровольский В.А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. Киев. Вища школа, 1974. 3. Чичурин А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса: Монография. 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Изд-во РУДН, 2002. – 163 с. 4. Чичурин А.В. // Вестник Белорусского ун-та. Сер. 1, Математика. – 2003. – № 2. – С. 74 - 78. 5. Лукашевич Н.А. // Дифференц. уравнения. 1993. Т.29, № 2. С. 353-357. 6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 462 с.