О НЕТЕРОВОСТИ ОПЕРАТОРА ТИПА СВЕРТКИ С ПЕРЕМЕННЫМИ "КОЭФФИЦИЕНТАМИ"

И.В.Лизунова

Рассматривается интегральный оператор вида

$$(H\varphi)(x) = a(x)\varphi(x) + \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} b_j(x,t)k_j(x-t)\varphi(t)dt,$$

где "коэффициенты" $a(x), b_j(x,t) (j = 1,2,...,n)$ имеют в бесконечно удаленной точке рост или убывание порядка показательной функции.

Под $L_p^\alpha(R_1)$ подразумевается класс функций $\varphi(x) \in L_p(R_1)$ таких, что $\varphi(x)e^{\alpha x} \in L_p(R_1)$.

Предполагается, что в операторе H $k_j(x) \in L_1(R)$,

$a(x)e^{-\alpha x} = a^{(1)}(x) \in B^{\alpha p}(R_1)$, $b_j(x,t)e^{-\alpha x} = b_j^{(1)}(x,t) \in B^{\alpha p}(R_2)$.

Доказывается

Теорема. Оператор $H: L_p^\alpha(R_1) \to L_p(R_1)$ нетеров тогда и только тогда, когда $ess\ inf\ a^{(1)}(x) > 0$,

$$\sigma^+(x) = a^{(1)}(+\infty) + \sum_{j=1}^{n} b_j^{(1)}(+\infty,+\infty)K_j(x) \neq 0,$$

$$\sigma^-(x) = a^{(1)}(-\infty) + \sum_{j=1}^{n} b_j^{(1)}(-\infty,-\infty)K_j(x) \neq 0,$$

где $K_j(x)$ - преобразование Фурье ядер $k_j(x)$, а его индекс равен

$$IndH = Ind\frac{\sigma^-(x)}{\sigma^+(x)}.$$

Отмечается, что теорема может быть обобщена на случай, когда

$$H: L_p^\alpha(R_1) \quad L_p^\beta(R_1).$$

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Н.П.Зизелюк

При малых возмущениях, вносимых плоским электродом в плазму, состояние приэлектродного слоя плазмы описывается уравнением более общим, чем второе уравнение Пенлеве.

$$W'' = \beta ww' + 2w^3 + zw + \alpha \qquad (1)$$

где W - пропорционально величине электрического поля;

β - разность температур компонент плазмы;

α =const

Для $\beta = 2(2\alpha - \frac{1}{2\alpha})$ уравнение (1) примет вид:

$$W'' = a^2(2w^3 + zw + \frac{1}{2a}) \quad , \text{ где } a = 2\alpha > 0,\ a \neq 1 \qquad (2)$$

Используя работу [1] рассмотрим для (2) асимптотическое поведение правильных решений.

Через каждую точку $M(z_0, w_0) \in D$, *где* $D = \left\{ (z,w): \begin{array}{c} 0 \le z < \infty \\ -\infty < w < +\infty \end{array} \right\}$

проходит единственно правильное решение $W = W_M(z)$ уравнения (2). Это решение асимптотически снизу приближается к лежащей в D ветви $W = \varphi(z)$ неявной функции, определяемой уравнением $2w^3 + zw + \frac{1}{2a} = 0$, причем $\lim\limits_{z \to +\infty} y_M' = 0$.

Через каждую точку $M(z_0, w_0) \in \overline{D}_i$, где

$$D_1 = \left\{ (z,w): \tfrac{3}{2} a^{-2/3} < z < +\infty;\ \tfrac{1}{2} a^{-1/3} < w < +\infty \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (z,w): 0 < z < +\infty; -\infty < w < 0 \right\}$$

проходит единственное правильное, лежащее полностью в D_i, решение уравнения $W'' = a^2(2w^3 - zw + \frac{1}{2a})$ $\qquad (2')$

Это решение асимптотически приближается снизу к лежащей в D_1 ветви $\varphi_1(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} z^{1/2} + 0(z^{-1})$ неявной функции, определяемой уравнением $2w^3 - zw + \frac{1}{2a} = 0$, или сверху к ветви $\varphi_2(z) = -\frac{\sqrt{2}}{2} z^{1/2} + 0(z^{-1})$ этой же неявной функции, лежащей в D_2.

Ряд $W = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j z^{-1-3j}$; $b_0 = -\frac{1}{2a}$; $\qquad (3)$

где $b_s = (3s-2)(3s-1)b_{s-1} - 2\sum\limits_{k=0}^{s-1} \sum\limits_{m=0}^{k} b_m b_{k-m} b_{s-k-1}$; $s = 1,2,3\ldots$;

дает асимптотическое представление семейства правильных решений уравнения (2).

Расходящиеся степенные ряды

$$W=\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^{\frac{1-3j}{2}};\ \text{где}\ b_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$b_1=-\frac{1}{4a};\ b_{s+1}=\frac{9(s-1)^2-1}{8}b_{s-1}-\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=0}^{k-1} b_m b_{k-m} b_{s-k}\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}\sum_{k=0}^{s-1} b_k b_{s-k};\ s=1,2,3,\ldots$$

представляют собой асимптотические разложения правильных решений уравнения (2^1) лежащих в области D_1 и соответственно в D_2.

Литература

1. Яблонский А.И. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук, 1963, № 2. С. 5-11.

2. Щербинин П.П. // ТВТ. т. 10.1972.№ 2. С. 255.

3. Зизелюк Н.П. // Материалы конференции молодых ученых и специалистов. - Минск, 26-27 декабря 1978.- ч. II.С. 12.

ПАРНОЕ ДИСКРЕТНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЕРТКИ С КОНЕЧНОЙ КОММУТАТИВНОЙ ГРУППОЙ СДВИГОВ

А.И.Тузик

Рассматривается парное дискретное уравнение, которое с помощью оператора sgn записывается в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\overset{0}{a}_{n-k}+\overset{2}{a}_{n+k}+(-1)^k(\overset{1}{a}_{n-k}+\overset{3}{a}_{n+k})\right]x_k+$$

$$+sgn(n+0,5)\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\overset{0}{b}_{n-k}+\overset{2}{b}_{n+k}+(-1)^k(\overset{1}{b}_{n-k}+\overset{3}{b}_{n+k})\right]x_k\right\}=f_n,\ n\in Z$$

Предполагается, что $\left\{\overset{l}{a}_n\right\},\left\{\overset{l}{b}_n\right\}\in l_1,\ l=\overline{0,3};\ \{f_n\},\{x_n\}\in l_2$. С помощью преобразования Лорана [1,2] это уравнение сводится к равносильному сингулярному интегральному уравнению с конечной коммутативной [3] группой $G=\{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=\alpha_1(\alpha_2)\}$ прямых и обратных сдвигов Карлемана, где $\alpha_0(t)=t,\ \alpha_1(t)=-t, \alpha_2(t)=t^{-1}, \alpha_3(t)=-t^{-1}, |t|=1$.

На основании результатов из [3] для такого уравнения по аналогии с [4] получены необходимые и достаточные условия нетеровости, вычислен индекс, указаны способы его решения.

Литература

1. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М., 1978.

2. Тузик А.И.// ДУ. 1989. Т.25, № 8 С. 1462-1464.