АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ КЛАССОВ ЗАДАЧ, СОДЕРЖАЩИХ ПРИБЛИЖЕННЫЕ ДАННЫЕ

Матюшков Л.П., ОИПИ НАН Беларуси,
Матюшкова Г.Л., БрФ ЧУО «ИСЗ им. А.М. Широкова»

Решение различных прикладных задач принято считать устойчивым, если малые изменения в исходных данных приводят к небольшим изменениям результатов решения. Обычно оценка результата обусловлена погрешностями в исходных данных и колебания решения должны приближаться к ним.

При оценке устойчивости решения полезно расчленить задачу на две: дать принципиальную оценку возможности получить устойчивое решение, а во вторую очередь — оценить колебания отдельных компонентов решения.

Задачи автоматизации управления, проектирования, обучения часто связаны с необходимостью решить систему линейных уравнений. В таких случаях рассматриваются квадратные матрицы $n \times n$, для вычисления определителя системы. Если определитель равен нулю, то, говорят, что система не имеет решений (вырождена).

Так как часть элементов определителя приближенные числа, то в пределах их колебаний может содержаться и скрытый нулевой определитель. Поэтому целесообразно рассматривать определитель как функционал $F(Xij)$, где $Xij = aij + \varepsilon ij$, т.е. Xij выбирается из диапазона от aij до bij .

Такого рода специальные функции нами изучались на предмет получения их максимального и минимального значений. Ввиду их непрерывности и линейности нами было доказано [1], что максимальное и минимальное значение таких функционалов достигается в крайних точках, т.е. достаточно вычислить $2^{\mathfrak{R}}$ определителей, где $\mathfrak{R}$ — число приближенно заданных элементов Xij . Из этой оценки следует, что при больших $\mathfrak{R}$ такую задачу перебором решить затруднительно. Однако в прикладном плане можно решать достаточно большие задачи благодаря специфике функционала при вычислениях max F и min F, можно использовать градиентный метод с выбором в соответствии со знаком частной производной сразу для координат следующей точки *aij* или *bij*. Более того, если при реализации таких вычислений, будет получено два значения определителя разных знаков, то это говорит о неустойчивости решения задачи.

Если значения max F и min F будут одного знака, то решение задачи всегда существует и можно далее изучать вопрос о возможных колебаниях значений отдельных переменных системы уравнений. Реализация описанной схемы анализа эффективна при применении для решения системы уравнений вычислительных систем с символьным процессором. На первом шаге все приближенные элементы матрицы для вычисления определителя заменяются переменными x, y, …, Z и получается функция F(x,y,…,z). Далее вычисляются все частные производные в символьной форме $F'x, F'y, ..., F'z$ и случайным образом выбирается начальная точка $M_0(x, y, ..., z)$ для реализации градиентного метода (например, при случайных числах $\gamma \le 0{,}5 (0 < \gamma < 1)$ выбираются левые концы отрезка для любой из переменных, а в противном случае — правые. Использовав обычную схему для реализации метода градиентного спуска, получим max F и min F . Если они окажутся одного знака, то решение системы существует и устойчиво.

Если размерность задачи велика, то можно ограничиться частичным решением задачи: вычислить значение функции в точке M_0, и если оно отрицательно, то двигаться в направлении градиента к максимуму и при получении первого положительного решения считать систему неустойчивой, а при отрицательном значении max F, наоборот, устойчивой. Аналогично решается задача для положительного значения функции в точке V.

Покажем схематично реализацию описанной вычислительной схемы для определителя, заданного квадратной матрицей 4-го порядка с пятью приближенными элементами.

$$A=\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & u & 9 \\ x & y & 1 & 2 \\ 3 & z & 5 & t \end{Vmatrix}$$

где: $7{,}6 \le x \le 7{,}8$; $2{,}9 \le y \le 3{,}1$; $2{,}9 \le u \le 3{,}1$; $0{,}9 \le t \le 1{,}1$; $1{,}9 \le z \le 2{,}1$

С помощью символического процессора получим:

$$F(x,y,u,t,z) = -14t + 230 + 21yt - 221y - 14z + 2xut + 30x - 18xt + 27xz - 4xzu - 12u + 12yu$$

$$F'_x = 2ut + 30 - 18t + 27z - 4zu$$

$$F'_y = 21t - 221 + 12u$$

$$F'_u = 2xt - 4xz - 12 + 12y$$

$$F'_t = -14 + 21y + 2xu - 18x$$

$$F'_z = -14 + 27x - 4x \cdot u$$

$$M_0(x,y,u,t,z) = M_0(7{,}6;2{,}9;3{,}1;0{,}9;2{,}1)$$

$$F(M_0) = 52{,}894 \qquad F'_x = + ;\ F''_y = - ;\ F'_u = - ;\ F'_t = - ;\ F'_z = + .$$

В соответствии со знаками производных и функции строим точку M_1 в направлении антиградиента $M_1(7{,}6;3{,}1;3{,}1;1{,}1;1{,}9)$.

$F(M_1) = -7{,}194$, т.е. система неустойчива, решение может оказаться некорректным. Так как все производные сохранили знаки, то $F(M_1) = \min F$.

Если же двигаться из точки M_0 в направлении градиента, то получим $M_1(7{,}8;2{,}9;2{,}9;0{,}9;2{,}1)$, $F(M_1) = 68{,}638$ и так как все производные сохраняют свой знак, то max F = 68,638, т.е. благодаря специфике рассматриваемого функционала, обеспечивается быстрая сходимость градиентного метода.

Специфика задачи состоит еще и в том, что размах колебаний переменных элементов матрицы обычно мал, так как отражает точность измерений и вычислений ее элементов.

Изложенный подход по результатам кореллирует с методом решения некорректных задач, предложенным А.Н. Тихоновым [2,3].

Если окажется, что размерность задачи приводит к затратам больших временных ресурсов на ЭВМ, то можно ограничиться применением заранее оговоренного числа вычислений функции $F(x,y,...,z)$, задавшись N попытками, в каждой из которых выбираются только левые или правые концы переменных. Если обнаружатся значения функции разных знаков, то система считается неустойчивой. При одинаковых знаках всех значений функции исследователь системы уравнений, анализируя сделанные N попыток, может назвать еще несколько «подозрительных» на его взгляд точек, чтобы сделать вывод о характере системы уравнений.

По аналогичной методике можно изучать и возможные колебания отдельных компонентов решения исходной системы уравнений, определив границы колебаний определителей для каждой из искомых переменных системы уравнений, так как для каждой переменной исходной системы (x_1, x_2, x_T, x_n) верно соотношение $\frac{\max \Delta xi}{\max \Delta} \leq Xi \leq \frac{\max \Delta xi}{\min \Delta xi}$, где Δ — определитель системы, а ΔXi — определитель для поиска переменной Xi.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Матюшков Л.П., Жуковская Л.И. Оптимизация функционалов на множестве квадратных матриц. В сб. «Автоматизация процессов проектирования». ИТК АН БССР, Мн., 1979, с. 3—10.
2. Тихонов А.Н. О некорректно поставленных задачах. В сб. Вычислительные методы и программирование. М.: МГУ, 1967. — С. 3—33.
3. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

ВАРИОСКОПИЧЕСКАЯ ТРАНСПОЗИЦИЯ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Равков Д.А., УО «БГПУ им. М. Танка»

Активное внедрение в жизнь современного общества сложного комплекса средств информационных технологий оказывает серьезное воздействие и на образовательную среду. Интенсивное развитие визуальных форм массовой коммуникации, таких как телевидение, кино, компьютерные технологии, мультимедийный инструментарий обработки и представления информации предвосхищает визуальную (или наглядную) переориентацию человеческого мышления. Все большую роль на современном учебном занятии играют средства обучения, непосредственно связанные с визуальным предъявлением учебной информации. Если раньше процесс воспитания и обучения происходил на основе письменности, вербального смыслового контекста, то в наши дни усвоение знаний происходит, во многом, посредством прямого восприятия зрительных образов с экранов телевизоров и компьютерных дисплеев. Как следствие, все большую актуальность представляют вопросы разработки методологии предъявления учебной информации на современном занятии.

Тенденция к визуализации человеческого мышления оказывает воздействие на формы познания человеком окружающей действительности. На жизнь современного человека все сильнее влияют концепции и доктрины философии технического детерминизма. Техническое средство, при помощи которого происходит разнообразная информационная обработка, начинает играть самодовлеющую и главенствующую роль. Мы становимся свидетелями воплощения в жизнь известной концепции одного из самых заметных представителей философской школы технического детерминизма М. Маклюэна — «Средство само есть содержание» [1, с. 11]. Следует признать, что средства совре-