УДК 519.2:004.6

Л.П. МАХНИСТ, Т.И. КАРИМОВА, В.С. РУБАНОВ,
И.И. ГЛАДКИЙ
Брест, БрГТУ

О НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ, СВЯЗАННЫХ С МЕДИАНОЙ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Распределение Пуассона – распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями $P(X = k) = p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, где $\lambda > 0$ – параметр распределения.

Функцию распределения $F(x)$ можно определить следующим образом:

$$F(x) = P(X < x) = 0 \text{, если } x \le 0 \text{,}$$

$$F(x) = P\left(X < x\right) = \sum_{k=0}^{\lceil x \rceil - 1} p_k = F\left(\lceil x \rceil, \lambda\right) = 1 - \frac{1}{\left(\lceil x \rceil - 1\right)!}\int_0^{\lambda} t^{\lceil x \rceil - 1} e^{-t} dt \text{,}$$

если $x > 0$.

Для любого целого неотрицательного числа m выполняется [1] $\dfrac{1}{m!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^m e^{-t} dt = 1$, а следовательно,

$F\left(m+1, \lambda\right) = \dfrac{1}{m!}\displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} t^m e^{-t} dt = \dfrac{\Gamma\left(m+1, \lambda\right)}{m!}$, где $\Gamma\left(m, \lambda\right) = \displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} t^{m-1} e^{-t} dt$ – неполная верхняя гамма-функция (например, в [2]).

Рассмотрим следующие числовые последовательности $x'_m = e^{-m-0,5}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{\left(m+0,5\right)^k}{k!}$ и $y'_m = e^{-m-0,5}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\left(m+0,5\right)^k}{k!}$. Можно доказать, что для них выполняется $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty} y_m$.

Теорема. *Для последовательностей* $\left(x'_m\right)$ *и* $\left(y'_m\right)$ *выполняется равенство пределов* $\lim\limits_{m\to\infty} x'_m = \lim\limits_{m\to\infty} y'_m = 0,5$ *и выполняются неравенства* $0,5 < x'_m \le x'_1 = \dfrac{5}{2e\sqrt{e}}$ *и* $\dfrac{1}{e\sqrt{e}} = y'_1 \le y'_m < 0,5$.

◄ Пусть распределение случайной величины X задается плотностью вероятности, имеющей вид

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^{m-1}e^{-x}}{\Gamma(m)}, & x\geq 0\end{cases},$$ где $\Gamma(m)=\int\limits_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-t}dt$ – *гамма-функция Эйлера*.

Заметим, что гамма-распределение имеет математическое ожидание и дисперсию, которые равны параметру распределения m.

Согласно центральной предельной теореме, при больших m гамма-распределение может быть приближено нормальным распределением $Gamma(m)\approx \mathrm{N}\left(a;\sigma^2\right)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$ с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, для которых $a=\sigma^2=m$.

Следовательно, $\dfrac{x^{m-1}e^{-x}}{\Gamma(m)}\approx\dfrac{1}{\sqrt{2\pi m}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2m}}$ при больших m.

Тогда, учитывая, что $\Gamma(m)=(m-1)!$ ($m\in N$) и используя метод замены переменной в определенном интеграле, получим:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^{m+0,5} t^{m-1}e^{-t}dt=\int\limits_0^{m+0,5}\frac{t^{m-1}e^{-t}}{\Gamma(m)}dt\approx\Phi\left(\sqrt{m}\right)+\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{m}}\right),$$

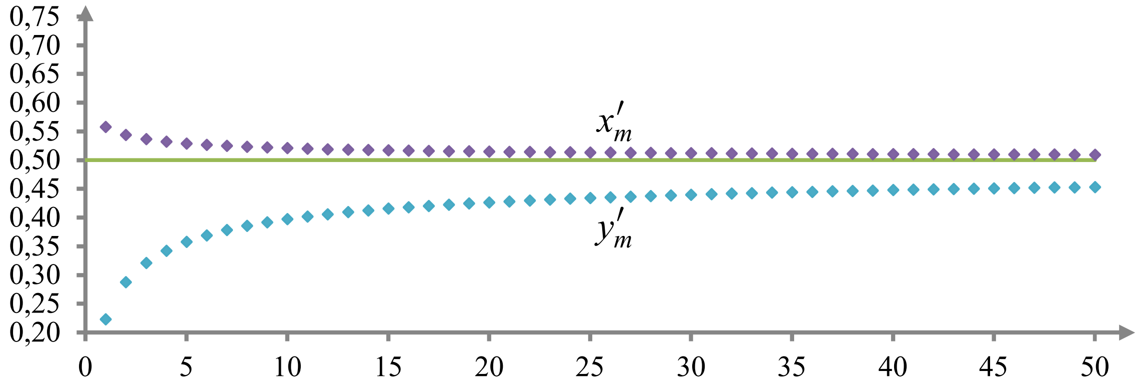
где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$.

Т.е. при больших m выполняется $y'_m\approx 1-\Phi\left(\sqrt{m}\right)-\Phi\left(\dfrac{1}{2\sqrt{m}}\right)$, тогда

$$\lim_{m\to\infty}y'_m=1-\lim_{m\to\infty}\Phi\left(\sqrt{m}\right)-\lim_{m\to\infty}\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{m}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du-\Phi(0)=0,5.$$

При больших m выполняется $x'_m\approx 1-\Phi\left(\sqrt{m}\right)-\Phi\left(\dfrac{1}{2\sqrt{m}}\right)$, следовательно, выполняются неравенства $0,5<x'_m\leq x'_1=\dfrac{5}{2e\sqrt{e}}$ и $\dfrac{1}{e\sqrt{e}}=y'_1\leq y'_m<0,5$. ►

На рисунке изображены числовые последовательности x'_m и y'_m $\left(m=\overline{1,50}\right)$.



Пусть целая часть числа параметра распределения λ равна $[\lambda] = m$. Если $\lambda \in [m, m+0,5]$ и, учитывая неравенства

$$y'_m = e^{-m-0,5}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m+0,5)^k}{k!} \le e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda^k}{k!} \le y_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!} < 0,5,$$

$$0,5 < x'_m = e^{-m-0,5}\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+0,5)^k}{k!} \le e^{\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} \le e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!} = x_m,$$

получим

$$F(m) = P(X < m) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda^k}{k!} < 0,5 \text{ и}$$

$F(m+0) = P(X \le m) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} > 0,5$, а следовательно, $[\lambda] = m$ – единственная медиана закона Пуассона с параметром λ.

Если дробная часть $\{\lambda\}$ параметра λ распределения Пуассона удовлетворяет неравенству $\{\lambda\} \le 0,5$, то медиана такого распределения равна целой части этого параметра.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Махнист, Л. П. О медиане закона распределения Пуассона и некоторых числовых последовательностях / Л. П. Махнист, [и др.] // Вестн. БрГТУ. – 2015. – № 5 (65) : Физика. Математика. Информатика. – С. 77–81.

2. Янке, Е. Специальные функции: формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. – М. : Наука, 1968. – 344 с.