УДК 551.492

О МОМЕНТАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МОДЕЛИ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА В ПРАКТИКЕ ГИДРОЛОГИИ

Волчек А.А., Гладкий И.И., Махнист Л.П., Рубанов В.С.
Брестский государственный технический университет;
224017, Республика Беларусь, г. Брест, ул. Московская, 267;
Тел. +375 162 42-65-72; e-mail: iigladki@tut.by

В работе рассматривается модель многолетних колебаний речного стока, полученная на основе стохастического дифференциального уравнения Орнштейна–Уленбека. Рассматриваемый процесс, который является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с соответствующим коэффициентом сноса и диффузии, дает возможность оценить математическое ожидание и моменты распределения вероятностей изменения речного стока. Эти параметры являются решением системы дифференциальных уравнений второго порядка с краевыми условиями, полученными на основе уравнения Фоккера–Планка и обратного уравнения Колмогорова для переходной плотности вероятности. В отличие от использования численного интегрирования этой системы дифференциальных уравнений, в работе получено решение, представленное в виде степенных рядов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть $\overline{V}$ – среднегодовой расход воды, а V_t – расход воды в момент времени t. Тогда, полагая $X_t = (V_t - \overline{V}) / \overline{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна–Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma\, dW_t, \qquad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс (так что $\dfrac{dW_t}{dt} = W_t'$ – обобщенный случайный процесс белого шума с параметром $\sigma = C_V\sqrt{2k}$), C_V – коэффициент вариации, k^{-1} – время релаксации речного стока.

Процесс Орнштейна–Уленбека является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с коэффициентами сноса $a(t,x) = -kx$ и диффузии $\sigma(t,x) = \sigma^2$, переходная плотность вероятности $p(t,x,y)$ которого является фундаментальным решением соответствующего уравнения Фоккера–Планка (т.е. прямого уравнения Колмогорова) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t}=k\frac{\partial}{\partial y}(yp)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

где коэффициент k определяется по формуле $k=-\ln r$, так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид $e^{-k\tau}$, а r – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ сток равен x, а x_* – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение V будет находиться в полуинтервале $[x_*,\infty)$ при условии, что $x\in[x_*,+\infty)$. Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ, однородны по времени, обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x,y)=-kx\frac{\partial}{\partial x}p(t,x,y)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}. \qquad (2)$$

Пусть T – момент времени, в который значение V покинет промежуток $[x_*,+\infty)$. Тогда

$$prob(T\geq t)=G(t,x), G(t,x)=\int\limits_{x_*}^{+\infty}p(t,x,y)dy.$$

Интегрируя (2) по y на интервале от x_* до $+\infty$, получаем

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}=-kx\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2}.$$

Учитывая условия отражения на бесконечности и поглощения в точке $x=x_*$, получим следующие краевые условия:

$$G(t,x)\Big|_{x=x_*}=0, \frac{\partial G(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=+\infty}=0.$$

Так как функция $1-G(t,x)$ является распределением случайной величины T, то моменты n-ого порядка времени достижения границы x_* определяются соотношениями

$$T_k=-\int\limits_0^{+\infty}t^k\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt=\int\limits_0^{+\infty}kt^{k-1}G(t,x)dt.$$

Интегрируя по t на интервале от 0 до $+\infty$ соотношение

$$nt^{n-1}\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}=-kx\frac{\partial}{\partial x}\left(nt^{n-1}G(t,x)\right)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(nt^{n-1}G(t,x)\right)$$

и учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial G(t,x)}{\partial t} dt = G(+\infty, x) - G(0,x) = -1,$$

получаем следующие уравнения для T_1 и T_n:

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_1}{dx^2} - kx\frac{dT_1}{dx} = -1, \qquad \text{при } \frac{dT_1}{dx}(+\infty) = 0,\ T_1(x)\big|_{x=x_*} = 0,$$

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_n}{d\,x^2} - kx\frac{dT_n}{dx} = -nT_{n-1}, \text{ при } \frac{dT_n}{dx}(+\infty) = 0,\ T_n(x)\big|_{x=x_*} = 0.$$

Введя безразмерные величины

$$kT_1 = \theta_1,\ k^2T_2 = \theta_2,$$

$$x\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x}{C_V} = \xi,\ x_*\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x_*}{C_V} = \xi_*,$$

приходим к системе для оценки математического ожидания T_1 и среднего квадратичного отклонения $\sqrt{T_2 - T_1^2}$:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \frac{d\theta_1}{d\xi}(+\infty) = 0, \theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0, \\ &\frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_2}{d\xi} = -2\theta_1, \frac{d\theta_2}{d\xi}(+\infty) = 0, \theta_2(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Система (3), приведенная в [1], при решении различных прикладных задач, например, в [2], интегрировалась численными методами.

2. О решении уравнений модели

Найдем точное решение первого уравнения системы (3).

Введя замену $\frac{d\theta_1}{d\xi} = f_1(\xi)$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\frac{df_1}{d\xi} - \xi f_1 = -1$ с начальным условием $f_1(\xi)\big|_{\xi=+\infty} = 0$.

Тогда $f_1(\xi) = (C - \int e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение дифференциального уравнения $\frac{df}{d\xi} - \xi f = -1$.

Заметим, что $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1$. Тогда, учитывая начальное условие $f_1(\xi)\big|_{\xi=+\infty} = 0$, имеем $f_1(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)e^{\frac{\xi^2}{2}}$.

Используя разложение функции e^z в ряд Маклорена, имеем:

$$e^{\frac{\xi^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!} \text{ и } e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}.$$

Тогда $\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$ и, следовательно, $f_1(\xi)$ можно представить в виде

$$f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n \xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}\right).$$

Используя правило Коши умножения рядов, получим

$$f_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!}.$$

Лемма. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m} = \frac{(2n)!!(m-1)!!}{(2n+1+m)!!}$ для любого натурального m.

Доказательство. Используя бином Ньютона

$$x^m(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k+m}$$

и интегрируя, имеем:

$$I_{m,n} = \int\limits_0^1 x^m(1-x^2)^n dx = \int\limits_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k+m}dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}.$$

Заметим, что с другой стороны

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}(1-x^2)^n}{m+1}\bigg|_0^1 - \int\limits_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}d(1-x^2)^n = \frac{2n}{m+1}I_{m+2,n-1}.$$

Тогда

$$I_{m,n} = \frac{(2n)!!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(m+2k-1)}I_{m+2n,0}.$$

Учитывая, что

$$I_{m+2n,0}=\int_0^1 x^{m+2n}dx=\left.\frac{x^{m+2n+1}}{m+2n+1}\right|_0^1=\frac{1}{m+2n+1},$$

имеем:

$$I_{m,n}=\frac{(2n)!!}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}(m+2k-1)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}=\frac{(2n)!!(m-1)!!}{(2n+1+m)!!}$$

для любого натурального m и

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Тогда

$$f_1(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Так как $\dfrac{d\theta_1}{d\xi}=f_1(\xi)$, то

$$\theta_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}+C$$

– решение уравнения $\dfrac{d^2\theta_1}{d\xi^2}-\xi\dfrac{d\theta_1}{d\xi}=-1$.

Учитывая начальное условие, $\theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0$, получаем, что

$$\theta_1(\xi)=S_1(\xi)-S_1(\xi_*),\tag{4}$$

где $S_1(\xi)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\dfrac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}$, а $\{t\}$ – дробная часть числа t.

Используя предлагаемую методику, найдем решение уравнения:

$$\frac{d^2G}{d\xi^2}-\xi\frac{dG}{d\xi}=-S_1(\xi),\quad \left.\frac{dG}{d\xi}\right|_{\xi=+\infty}=0,\quad G(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0.$$

Введя замену $\dfrac{dG}{d\xi}=f_2(\xi)$, приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка $\dfrac{df_2}{d\xi}-\xi f_2=-S_1(\xi)$ с условием $f_2(\xi)\big|_{\xi=+\infty}=0$.

Аналогично, как и для первого уравнения системы (3), получим $f_2(\xi)=(C-\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t)dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – общее решение уравнения $\frac{df_2}{d\xi}-\xi f_2=-S_1(\xi)$.

Учитывая начальное условие $f_2(\xi)\big|_{\xi=+\infty}=0$, имеем

$$f_2(\xi)=(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t)dt-\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t)dt)e^{\frac{\xi^2}{2}}.$$

Так как $S_1(\xi)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} S_1(t)dt=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}}{(k-1)!!k}\int\limits_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Заметим, что для любого $n\geq 2$ выполняется

$$J_n=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}t^n dt=-t^{n-1}e^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_0^{+\infty}+(n-1)\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}t^{n-2}dt=(n-1)J_{n-2}.$$

Учитывая, что $J_0=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и

$$J_1=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}tdt=-e^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_0^{+\infty}=1,$$

имеем:

$$J_{2k}=(2k-1)!!J_0=(2k-1)!!\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad\text{и}\quad J_{2k+1}=(2k)!!J_1=(2k)!!$$

для любого натурального k.

Следовательно, $J_k=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k-1}{2}\right\}}(k-1)!!$ и

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\theta_1(t)dt=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}J_k}{(k-1)!!k}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2,$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$.

Таким образом, $f_2(\xi)=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2-\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}S_1(t)dt\right)e^{\frac{\xi^2}{2}}$ – решение уравнения $\frac{df_2}{d\xi}-\xi f_2=-S_1(\xi)$, удовлетворяющее условию $f_2(\xi)\big|_{\xi=+\infty}=0$.

Используя разложение функции e^z в ряд Маклорена, имеем

$$J_k(\xi)=\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}t^k dt=\int\limits_0^{\xi}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m t^{2m}}{2^m m!}\right)t^k dt=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m\xi^{2m+1+k}}{(2m)!!(2m+1+k)},$$

$$\int\limits_0^{\xi} e^{-\frac{t^2}{2}}\theta_1(t)dt=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{k}{2}\right]}}{(k-1)!!k}\int\limits_0^{\xi} t^k e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{k}{2}\right]}J_k(\xi)}{(k-1)!!k}.$$

Тогда $f_2(\xi)=e^{\frac{\xi^2}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{k}{2}\right]}J_k(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}}}{(k-1)!!k}$.

Используя правило Коши умножения рядов, получим

$$J_m(\xi)\cdot e^{\frac{\xi^2}{2}}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\xi^{2n+1+m}}{2^n n!(2n+1+m)}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{2^n n!}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\xi^{2n+1+m}}{2^k k!(2k+1+m)2^{n-k}(n-k)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}\right)\frac{\xi^{2n+1+m}}{2^n n!}.$$

Следовательно, используя утверждение, для любого натурального m выполняется

$$J_m(\xi)\cdot e^{\frac{\xi^2}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1+m}\right)\frac{\xi^{2n+1+m}}{2^n n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(m-1)!!\xi^{2n+1+m}}{(2n+1+m)!!}.$$

Тогда

$$f_2(\xi)=e^{\frac{\xi^2}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{k}{2}\right]}J_k(\xi)e^{\frac{\xi^2}{2}}}{(k-1)!!k}=$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ln 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n}}{(2n)!!}-\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\xi^{2n+1+k}}{(2n+1+k)!!k}.$$

Производя преобразования повторного ряда, получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\xi^{2n+1+k}}{(2n+1+k)!!k}=$$

$$=-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{\xi^{2n}}{(2n)!!}.$$

Тогда

$$f_2(\xi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\ln 2-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{\xi^{2n}}{(2n)!!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Так как $\frac{dG}{d\xi}=f_2(\xi)$, то, учитывая начальное условие $G(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0$, получаем, что $G(\xi)=S_2(\xi)-S_2(\xi_*)$, где

$$S_2(\xi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\ln\left(2-2\left\{\frac{k-1}{2}\right\}\right)-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{1}{m-\left\{\frac{k}{2}\right\}}\right)\frac{(-1)^{k-1}\xi^{k}}{(k-1)!!k},$$

а $[t]$ и $\{t\}$ – целая и дробная части числа t соответственно.

Так как, учитывая (4), $H(\xi)=-S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)$ – решение уравнения $\frac{d^2H}{d\xi^2}-\xi\frac{dH}{d\xi}=S_1(\xi_*)$, $\frac{dH}{d\xi}(+\infty)=0$, $H(\xi)\big|_{\xi=\xi_*}=0$, то

$$\theta_2(\xi)=2\big(S_2(\xi)-S_2(\xi_*)-S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\big). \tag{5}$$

Таким образом, соотношения (4) и (5) – решение системы дифференциальных уравнений (3).

3. Выводы

Рассмотрим пример, приведенный в [1]. Пусть среднегодовой сток Волги $\overline{V}=239$ км^3/год (объем выборки $n=113$), среднеквадратичное отклонение равно 46 км^3/год. Тогда $C_v=0{,}19$. Если коэффициент корреляции r между смежными значениями стока равен 0,42, тогда $k=-\ln 0{,}42\cong 0{,}9$ год$^{-1}$, $\sigma=0{,}257$ год$^{-0.5}$, $\sigma^2=0{,}066$ год$^{-1}$. Предположим, что в начальный момент времени $V=377$ км^3/год. Через сколько лет сток достигнет 101 км^3/год, т.е. уменьшится на шесть среднеквадратичных отклонений (276 км^3/год)? В данном случае $\xi_*=-3$ (это отклонение от среднегодового значения стока, взятое в долях C_V), а времени перехода стока от одного состояния к другому соответствует $\xi=3$.

Таблица 1

Значения параметров

ξ_*	ξ					
	-2	-1	0	1	2	3
-3	76,5 (85,6)	84,8 (86,1)	86,9 (86,2)	87,8 (86,2)	88,4 (86,2)	**88,7 (86,2)**
-2		8,3 (10,0)	10,4 (10,3)	11,3 (10,3)	11,9 (10,3)	12,2 (10,3)
-1			2,1 (2,4)	3,0 (2,6)	3,5 (2,6)	3,9 (2,6)
0				0,9 (0,9)	1,4 (1,0)	1,8 (1,1)

В соответствии с таблицей 1, полученной с использованием решения системы (3), $\theta_1 = 88{,}7$, а размерное время составляет $m_T = \frac{\theta_1}{k} = 88{,}7 : 0{,}9 \approx 99$ лет.

Так как $\sigma_T = \frac{\sqrt{\theta_2 - \theta_1^2}}{k} = 86{,}2 : 0{,}9 \approx 95{,}8$, то доверительный интервал $(m_T - t\frac{\sigma_T}{\sqrt{n}}; m_T + t\frac{\sigma_T}{\sqrt{n}})$ для оценки математического ожидания с надежностью $\gamma = 0{,}95$ $(t = 1{,}96,\ \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{\gamma}{2})$ определяется неравенством $81 < m < 117$.

В [3] предложено теоретическое обоснование асимптотического поведения математического ожидания рассматриваемого распределения вероятностей многолетних колебаний речного стока, широко используемого в практике гидрологических расчетов. Анализ методики получения оценок моментов этого распределения позволяет получить асимптотическое поведение решений рассматриваемой модели с помощью изучения соответствующих производных более высоких порядков, что может послужить темой дальнейших исследований.

Литература

1. Найденов В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / Найденов В.И., Швейкина В.И. // Водные ресурсы. Том 29, № 1. – М., 2002. – С. 62–67.

2. Волчек А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / Волчек А.А., Парфомук

С.И. // Вестник Брестского государственного технического университета. – Брест: БрГТУ, 2006. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 56–60.

3. Волчек А.А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / Волчек А.А., Махнист Л.П., Рубанов В.С. // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь: сборник материалов международной научно-технической конференции, Брест, 26–28 апреля 2010 г. – Брест: БрГТУ, 2010. – С. 45–49.