

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Т.Г. Хомицкая

Белгосуниверситет
пр. Скорины, 4, Минск-80, Беларусь,
E-mail: tgh@e-mail.ru, tgh@tut.by

Линейно-квадратичные задачи представляют следующий класс задач оптимального управления (ОУ) вслед за линейными задачами ОУ. Качественная теория таких задач разработана столь же глубоко, как и аналогичная теория для линейных задач. Предложено много алгоритмов их численного решения. Однако, известные алгоритмы касаются в основном программной оптимизации динамических систем и не настолько эффективны, чтобы синтезировать ОУ типа обратной связи.

Быстрые методы вычисления оптимальных программ для линейных задач ОУ используются для конструирования алгоритмов работы оптимальных регуляторов, которые генерируют в режиме реального времени текущие значения ОУ типа обратной связи. Первые методы такого рода были предложены еще в [1, 2]. Затем они получили развитие в [3 – 6]. Результаты по ОУ в режиме реального времени были использованы в [7 – 10] для стабилизации динамических систем ограниченными управлениями.

В данной работе предлагаются методы вычисления оптимальной программы линейно-квадратичной задачи ОУ и алгоритмы работы оптимального регулятора для реализации позиционного решения.

1. Постановка задачи. Схема решения

В классе кусочно-непрерывных скалярных управлений $u(t)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, $t_* < t^* < +\infty$, рассмотрим линейно-квадратичную задачу терминального управления:

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \varphi_0(x^0(t^*)) = \min \varphi_0(x(t^*)), \\ \dot{x} &= A(t)x + b(t)u, x(t_*) = x_0, \varphi_1(x(t^*)) \leq 0, |u(t)| \leq L, t \in T, \\ (\varphi_0(x) &= c_0'x + x'D_0x/2, \varphi_1(x) = c_1'x + x'D_1x/2, c_0, c_1 \in R^n, L \in R, D_0, D_1 \in R^{n \times n}, D_0 > 0, D_1 \geq 0). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x = x(t)$ – n -вектор состояния системы управления в момент времени t , $x_0 \in R^n$ – заданное начальное состояние, $u = u(t)$ – значение скалярного управляющего воздействия, $A(t)$, $b(t)$, $t \in T$, – кусочно-непрерывные $n \times n$ -матричная и n -векторная функции.

Кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t \in T$, назовем допустимым управлением (программой), если она удовлетворяет неравенству $|u(t)| \leq L$, $t \in T$, и порожденная ею траектория $x(t)$, $t \in T$, системы $\dot{x} = A(t)x + b(t)u$, $x(t_*) = x_0$, попадает в момент $t = t^*$ на терминальное множество $X^* = \{x \in R^n : \varphi_1(x) \leq 0\}$.

Программу $u^0(t)$, $t \in T$, будем называть оптимальной (оптимальным программным управлением), если на соответствующей ей траектории $x^0(t)$, $t \in T$, критерий качества задачи (1) достигает минимального значения: $\alpha^0 = \varphi_0(x^0(t^*)) = \min \varphi_0(x(t^*))$, где минимум берется по всем программам $u(t)$, $t \in T$.

Пусть $X^\alpha = \{x \in R^n : \varphi_0(x) \leq \alpha\}$, $\alpha \in R$. Задача (1) эквивалентна следующей:

$$\alpha^0 = \min \alpha, \dot{x} = A(t)x + b(t)u, x(t_*) = x_0, x(t^*) \in X^\alpha \cap X^*, |u(t)| \leq L, t \in T. \quad (2)$$

Вопрос о существовании программ задачи (2) и метод их вычисления (в случае существования) будет изложен ниже (п. 4).

Изложим сначала метод вычисления оптимальной программы задачи (2), предполагая, что существуют программы, для которых выполняется условие Слейтера: $\varphi_1(x(t^*)) < \rho$, $\rho < 0$.

Оптимальную программу задачи (2) будем строить с помощью двух процедур: 1) вычисление оптимальной программы кусочно-линейной аппроксимации задачи (2) в классе дискретных программ; 2) процедура доводки.

2. Вычисление оптимальной программы кусочно-линейной задачи ОУ

Программу $u(t)$, $t \in T$, назовем дискретной (с периодом квантования h , $h = (t^* - t_*)/N$, N – натуральное число), если $u(t) = u(t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $t_k = t_* + kh$, $k = \overline{0, N-1}$.

Пусть $Q_0 = \{h_i, i \in I_0\}$ и $Q^* = \{r_i, i \in I^*\}$ – семейства m единичных n -векторов ($m \geq n$), каждые n из которых линейно независимы. Вычислим $g_i^*(\alpha) = \max h_i'x$; $g_{-i}(\alpha) = \min h_i'x$, $x \in X^\alpha$, $i \in I_0$; $y_i^* = \max r_i'x$; $y_{-i} = \min r_i'x$, $x \in X^*$, $i \in I^*$.

Множества $\tilde{X}^\alpha = \{x \in R^n : g_{-i}(\alpha) \leq h_i'x \leq g_i^*(\alpha), i \in I_0\}$, $\tilde{X}^* = \{x \in R^n : y_{-i} \leq r_i'x \leq y_i^*, i \in I^*\}$ назовем (внешней) кусочно-линейной аппроксимацией соответствующих множеств X^α , X^* .

Под кусочно-линейной аппроксимацией задачи (2) понимается следующая задача ОУ в классе дискретных управлений:

$$\tilde{\alpha}^0 = \min \alpha, \dot{x} = A(t)x + b(t)u, x(t_*) = x_0, x(t^*) \in \tilde{X}^\alpha \cap \tilde{X}^*, |u(t)| \leq L, t \in T. \quad (3)$$

Задача (3) является нелинейной задачей ОУ. Для ее решения введем вспомогательную задачу, которая при фиксированном значении α является линейной задачей ОУ:

$$\beta(\alpha) = \min \beta, \dot{x} = A(t)x + b(t)u, x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l, x(t^*) \in \tilde{X}^\alpha \cap \tilde{X}^*, |u(t)| \leq L, t \in T, (\beta \in R). \quad (4)$$

Здесь $l = x^* - x_0$, $\varphi_0^* = \varphi_0(x^*) = \min \varphi_0(x)$, $x \in X^*$.

Для решения задачи (4) разработан быстрый двойственный метод вычисления оптимальных программ, который представляет обобщение метода [3] на задачи ОУ с параметрами. Функциональная форма задачи (4) имеет вид:

$$\beta(\alpha) = \min \beta, q_*(\alpha) \leq \sum_{t \in T_h} f_h(t)u(t) + f_l \beta \leq q^*(\alpha), |u(t)| \leq L, t \in T. \quad (5)$$

Здесь

$$f_h(t) = \int_{t_*}^{t_*+h} H F(t^*, \tau) b(\tau) d\tau, t \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\}, f_l = H F(t^*, t_*) l,$$

$$q_*(\alpha) = \begin{pmatrix} g_{-i}(\alpha), \\ i \in I_0; \\ y_{-i}, \\ i \in I^* \end{pmatrix} - H F(t^*, t_*) x_0, q^*(\alpha) = \begin{pmatrix} g_i^*(\alpha), \\ i \in I_0; \\ y_i^*, \\ i \in I^* \end{pmatrix} - H F(t^*, t_*) x_0, H = \begin{pmatrix} h_i', \\ i \in I_0; \\ r_i', \\ i \in I^* \end{pmatrix},$$

$$F(t, \tau) = F(t)F^{-1}(\tau), \dot{F} = A(t)F, F(t_*) = E.$$

В отличие от функциональной формы задачи, рассмотренной в [3], в задаче (5) основные ограничения носят вид неравенств (в [3] были равенства) и в ней присутствует параметр β , по которому производятся вычисления наряду с оптимальным управлением. В связи с этим внесены изменения в основные понятия динамической реализации адаптивного метода. Прежде всего изменяется основное понятие метода – опора. Это влечет изменения в сопровождающие ее элементы. По-новому формулируется критерий оптимальности допустимого управления и опоры. Вносятся изменения в описание операций двойственного метода.

При $\alpha = \varphi_0^*$ задача (4) имеет вид

$$\beta^* = \min \beta, \dot{x} = A(t)x + b(t)u, x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l, x(t^*) = \varphi_0^*, |u(t)| \leq L, t \in T. \quad (6)$$

Справедливы следующие утверждения:

Лемма 1. $\beta(\alpha)$, $\alpha \in R$, – непрерывная монотонно убывающая функция, для которой $\beta(\varphi_0^*) = \beta^*$; $\beta(\alpha) \rightarrow -\infty$ при $\alpha \rightarrow -\infty$.

Лемма 2. Оптимальное значение $\tilde{\alpha}^0$ критерия качества задачи (3) равно минимальному корню уравнения $\beta(\alpha) = 0$.

Решение задачи (3) начнем с решения задачи (6). Если $\beta^* = \beta(\varphi_0^*) < 0$, то x^* – внутренняя точка множества достижимости системы (1); задача (1) не является экстремальной задачей; ее можно сделать таковой, если ввести дополнительный критерий качества. В случае $\beta^* = 0$, согласно лемме 2, φ_0^* – минимальное значение критерия качества задачи (3): $\tilde{\alpha}^0 = \varphi_0^*$; построенное программное решение $u_\alpha^0(t)$, $x_\alpha^0(t)$, $t \in T$, задачи (6) является программным решением задачи (3). При $\beta^* > 0$ найдем минимальный корень уравнения $\beta(\alpha) = 0$. Это уравнение можно решать любым из известных методов.

В данной работе при решении примеров оказались достаточными следующие операции.

Шаг 1. Найдем решение $\beta^{(1)}$ задачи (4) с $\alpha = \alpha^{(1)} = \varphi_0(x_0 + (1 - \beta^*)l)$.

Шаг 2. В качестве $\alpha^{(2)}$ выберем на плоскости $\alpha O\beta$ точку пересечения с осью $O\alpha$ прямой, проведенной через точки $(\varphi_0^*; \beta^*)$ и $(\alpha^{(1)}; \beta^{(1)})$. Найдем $\beta^{(2)}$ и $\partial\beta/\partial\alpha|_{\alpha=\alpha^{(2)}}$, решив задачу (4) с $\alpha = \alpha^{(2)}$.

Шаг 3. Пусть $\alpha^{(3)}$ – точка пересечения с осью $O\alpha$ квадратичной параболы, проведенной через точки $(\alpha^{(1)}; \beta^{(1)})$, $(\alpha^{(2)}; \beta^{(2)})$, производная которой в точке $(\alpha^{(2)}; \beta^{(2)})$ равна $\partial\beta/\partial\alpha|_{\alpha=\alpha^{(2)}}$. Решив задачу (4) с $\alpha = \alpha^{(3)}$, получим $\beta^{(3)}$, $\partial\beta/\partial\alpha|_{\alpha=\alpha^{(3)}}$.

Шаг 4. Найдем точку пересечения $\alpha^{(4)}$ с осью $O\alpha$ кубической параболы, проведенной через точки $(\alpha^{(2)}; \beta^{(2)})$, $(\alpha^{(3)}; \beta^{(3)})$ и имеющей в этих точках производные $\partial\beta/\partial\alpha|_{\alpha=\alpha^{(2)}}$, $\partial\beta/\partial\alpha|_{\alpha=\alpha^{(3)}}$. Решив задачу (4) с $\alpha = \alpha^{(4)}$, найдем $\beta^{(4)}$.

Полученное значение $\beta^{(4)}$ при решении примеров было равно нулю с высокой точностью. Поэтому полагали $\tilde{\alpha}^0 = \alpha^{(4)}$.

Подсчитаем $\varepsilon_i^\alpha = g_i^*(\alpha) - h_i^* x_\alpha^0(t^*)$, $\varepsilon_{m+i}^\alpha = -g_{m+i}(\alpha) + h_{m+i}^* x_\alpha^0(t^*)$, $i \in I_0$. Среди чисел ε_i^α , $i = \overline{1, 2m}$ выберем n наименьших: ε_i^α , $i \in I_0'$, $|I_0'| = n$. Число $\tilde{\varepsilon}^\alpha = \max \varepsilon_i^\alpha$, $i \in I_0'$, назовем точностью аппроксимации множества X^α множеством \tilde{X}^α .

Аналогичным образом вычислим число $\tilde{\varepsilon}^*$ – точность аппроксимации множества X^* множеством \tilde{X}^* : подсчитаем $\varepsilon_i^* = y_i^* - r_i^* x_\alpha^0(t^*)$, $\varepsilon_{m+i}^* = -y_{m+i} + r_{m+i}^* x_\alpha^0(t^*)$, $i \in I^*$; выберем n наименьших среди чисел ε_i^* , $i = \overline{1, 2m}$: ε_i^* , $i \in I^{*}$, $|I^{*}| = n$; найдем $\tilde{\varepsilon}^* = \max \varepsilon_i^*$, $i \in I^{*}$.

Число $\tilde{\varepsilon} = \max\{\tilde{\varepsilon}^\alpha, \tilde{\varepsilon}^*\}$ назовем точностью аппроксимации программного решения задачи (2) программным решением задачи (3). Если при выбранном¹ $\varepsilon_0 > 0$ выполняется неравенство $\tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_0$, то перейдем ко второй процедуре.

Если $\tilde{\varepsilon}^\alpha > \varepsilon_0$, то в Q_0 добавим новый вектор $\tilde{h} = \text{grad } \varphi_0(x_\alpha^0(t^*)) / \|\text{grad } \varphi_0(x_\alpha^0(t^*))\|$; по обновленной совокупности Q_0 построим \tilde{X}^α . При $\tilde{\varepsilon}^* > \varepsilon_0$ в Q^* добавим новый вектор $\tilde{r} = \text{grad } \varphi_1(x_\alpha^0(t^*)) / \|\text{grad } \varphi_1(x_\alpha^0(t^*))\|$ и по обновленной совокупности Q^* построим \tilde{X}^* .

Программное решение новой задачи быстро строится с помощью упомянутого выше двойственного метода. Вспомогательную линейную задачу (4) с обновленной совокупностью векторов начнем решать с параметром $\alpha^{(1)}$, равным оптимальному значению $\tilde{\alpha}^0$ критерия качества задачи (3) с предыдущей совокупностью векторов. Решив задачу (4) с $\alpha = \alpha^{(1)}$, получим $\beta^{(1)}$, $\partial\beta/\partial\alpha|_{\alpha=\alpha^{(1)}}$. Построив прямую по $(\alpha^{(1)}; \beta^{(1)})$, $\partial\beta/\partial\alpha|_{\alpha=\alpha^{(1)}}$, найдем точку пересечения $\alpha^{(2)}$ прямой с осью $O\alpha$. Затем вычисления продолжим с третьего шага по описанной выше схеме.

В процессе решения задачи (3), если количество новых ограничений превысит n для множества \tilde{X}^α (\tilde{X}^*), то из добавленных в совокупность Q_0 (Q^*) удалим один элемент, которому соответствует ограничение с наибольшим ε_i^α (ε_i^*). Программное решение задачи (3), на котором выполняется условие перехода к процедуре доводки, будет получено через конечное число коррекций терминальных ограничений. Перейдем ко второй процедуре.

¹ Число ε подбирается так, чтобы последующая процедура доводки сходилась.

3. Доводка

Пусть $\tilde{u}(t)$, $t \in T$, – оптимальная программа задачи (4), удовлетворяющая условию перехода к процедуре доводки; $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_p$ – точки ее переключения, \tilde{v} – вектор потенциалов. Согласно [11], для оптимальности программы $u(t)$, $t \in T$, задачи (2) необходимо и достаточно существования такого потенциала $v \geq 0$, что вдоль траектории $x(t)$, $t \in T$, прямой системы $\dot{x} = A(t)x + b(t)u$, $x(t_*) = x_0$, и траектории $\psi(t)$, $t \in T$, сопряженной системы $\dot{\psi} = -A'(t)\psi$ с начальным условием $\psi(t^*) = c_0 + D_0x(t^*) + v(c_1 + D_1x(t^*))$ выполняется условие максимума: $\psi'(t)b(t)u(t) = \max_{|u| \leq 1} \psi'(t)b(t)u$, $t \in T$.

Процедура доводки для построения программного решения задачи (2) в классе кусочно-непрерывных функций заключается в решении уравнений доводки

$$\begin{aligned} \psi'(t^*)F(t^*, t_k)b(t_k) &= 0, \quad k = \overline{1, p}; \\ \varphi_1(x(t^*)) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Подсчитаем $v = \left\| \sum_{i \in I_m} \tilde{v}_i r_i \right\| / \left\| \sum_{i \in I_{om}} \tilde{v}_i h_i \right\|$. Взяв в качестве начальных приближений число v и моменты $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_p$, найденные после решения вспомогательной линейной задачи (4), решим систему (7) методом Ньютона. По полученному решению построим оптимальную программу задачи (1) в классе кусочно-непрерывных функций.

Для приложений, в которых управляющие воздействия реализуются с помощью устройств дискретного действия, большую роль играют оптимальные программы в классе дискретных функций. В случае малых периодов квантования h оптимальную кусочно-непрерывную программу можно использовать для вычисления почти оптимальной дискретной программы, если привлечь процедуру преддоводки, которая состоит в следующем. По оптимальной кусочно-непрерывной программе $u^0(t)$, $t \in T$, найдем интервалы $[t_k, t_k + h]$, $k = \overline{1, p}$, содержащие точки переключения программы t_k^0 , $k = \overline{1, p}$. Положим $u_h^0(t) = u^0(t)$, $t \in T \setminus \bigcup_{k=1}^p [t_k, t_k + h]$. Значения $u^0(t)$, $t \in [t_k, t_k + h]$, $k = \overline{1, p}$, заменим на $u_h^0(t_k) = 2u^0(t_k)(t_k^0 - t_k - h/2)$, $k = \overline{1, p}$.

4. Задача первой фазы

Существование допустимых управлений выявляется с помощью задачи первой фазы. Пусть $u_0(t)$, $t \in T$, – произвольная кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая ограничению $|u_0(t)| \leq L$, $t \in T$; $x_0(t)$, $t \in T$, – соответствующая ей траектория системы (1). Подсчитаем невязку терминального ограничения: $\rho_0 = \varphi_1(x_0(t^*))$.

Если $\rho_0 \leq 0$, то $u_0(t)$, $t \in T$, – программа задачи (2).

При $\rho_0 > 0$ рассмотрим задачу ОУ:

$$\rho^0 = \min \rho, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \quad \varphi_1(x(t^*)) - \rho \leq 0, \quad 0 \leq \rho \leq \rho_0, \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T. \quad (8)$$

Управление $u_0(t)$, $t \in T$, допустимо в задаче (8).

Задача (8) – нелинейная задача ОУ с параметром ρ . Поскольку задача (8) проще задачи (2), то для ее решения можно использовать описанную выше схему. Функциональная форма вспомогательной линейной задачи имеет вид:

$$\beta(\rho) = \min \beta, \quad q_*(\rho) \leq \sum_{i \in I^*} f_h(t)u(t) + f_i \beta \leq q^*(\rho), \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T.$$

Здесь

$$\begin{aligned} q_*(\rho) &= \begin{pmatrix} y_{*,i}(\rho) \\ i \in I^* \end{pmatrix} - HF(t^*, t_*)x_0, \quad q^*(\rho) = \begin{pmatrix} y_{i^*}^*(\rho) \\ i \in I^* \end{pmatrix} - HF(t^*, t_*)x_0, \quad H = \begin{pmatrix} r_i^* \\ i \in I^* \end{pmatrix}, \\ y_{i^*}^*(\rho) &= \max r_i^* x; \quad y_{*,i}(\rho) = \min r_i^* x, \quad x \in X_\rho^* = \{x \in R^n : \varphi_1(x(t^*)) - \rho \leq 0\}, \quad i \in I^*. \end{aligned}$$

Если $\rho^0 > 0$, то в задаче (2) нет допустимых управлений. При $\rho^0 = 0$ решение задачи (8) является программой задачи (2).

5. Оптимальное управление в режиме реального времени

Сначала определим понятие ОУ типа (дискретной) обратной связи (с периодом реализации h). Для этого погрузим задачу (1) в семейство задач

$$\varphi_0(x(t^*)) \rightarrow \min, \dot{x} = A(t)x + b(t)u, x(\tau) = z, x(t^*) \in X^*, |u(t)| \leq L, t \in T(\tau) = [\tau, t^*], \quad (9)$$

зависящее от скаляра $\tau \in T_h$ и n -вектора z .

Пусть $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T(\tau)$, – оптимальная программа задачи (9) для позиции (τ, z) , X_τ – множество состояний z , для которых существуют оптимальные программные решения задачи (9). Следуя теории оптимальных процессов функцию

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau|\tau, z), z \in X_\tau, \tau \in T_h, \quad (10)$$

назовем ОУ типа (дискретной) обратной связи (позиционным решением задачи (1), построение функции (10) – синтезом оптимальной обратной связи (синтезом оптимальной системы).

Использование обратных связей (10) предполагает, что в процессе управления состояния системы (1) измеряются в дискретные моменты $t \in T_h$ и по этой информации вырабатываются управляющие воздействия.

Замену в (1) управления u на функцию (10) называют замыканием системы управления. Траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u^0(t, x) + w(t), x(t_*) = x_0, \quad (11)$$

при постоянно действующем кусочно-непрерывном возмущении $w(t)$, $t \in T$, представляет решение уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u^0(t) + w(t), x(t_*) = x_0, u(t) = u^0(\tau|x(\tau)), t \in [\tau, \tau + h], \tau = t_0 + kh, k = \overline{0, N-1}.$$

Будем считать, что уравнение (11) описывает поведение физического прототипа математической модели (1). В этом случае функция $w(t)$, $t \in T$, содержит неточности математического моделирования и постоянно действующие возмущения.

Пусть по ходу некоторого конкретного процесса управления реализуется возмущение $w^*(t)$, $t \in T$. Ему будет соответствовать траектория $x^*(t)$, $t \in T$, замкнутой системы (11), удовлетворяющая тождеству

$$\dot{x} \equiv A(t)x^*(t) + b(t)u^0(t, x^*(t)) + w^*(t), t \in T, x^*(t_*) = x_0. \quad (12)$$

Из тождества (12) видно, что в процессе управления обратная связь (10) используется неполностью (не для всех $z \in X_\tau$). Нужны лишь ее значения $u^*(t) = u^0(t, x^*(t))$, $t \in T_h$, вдоль изолированной траектории $x^*(t)$, $t \in T$. При этом нет необходимости знать функцию $u^*(t)$, $t \in T_h$, заранее, достаточно уметь вычислять текущие значения $u^*(\tau)$ по мере поступления измерений текущих состояний $x^*(\tau)$. Функцию $u^*(t)$, $t \in T$, назовем реализацией оптимальной обратной связи в конкретном процессе управления.

Будем говорить, что построение $u^*(t)$, $t \in T$, осуществляется в режиме реального времени, если в каждой текущей позиции $(\tau, x^*(\tau))$ время $s(\tau)$ вычисления значения $u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau))$ не превосходит $h > 0$. Устройство, способное выполнять такую работу, называется оптимальным регулятором.

Алгоритм работы оптимального регулятора базируется на упомянутом выше двойственном методе.

До начала процесса управления оптимальный регулятор вычисляет оптимальную программу $u^0(t|t_*, x_0)$, $t \in T$, для начальной позиции (t_*, x_0) . Время на выполнение этой работы не имеет никакого значения. Для дальнейшего процесса управления запоминается следующая информация: 1) моменты переключения $t_i^0 = t_i^0(t_*, x_0)$, $i = \overline{1, p(t_*)}$; 2) значение потенциала $v = v(t_*, x_0)$; 3) оптимальное значение $\alpha^0 = \alpha^0(t_*, x_0)$ критерия качества задачи (1); 4) оптимальная опора $K_{\text{оп}}^0(t_*, x_0)$ линейной задачи (4) для $\alpha = \alpha^0(t_*, x_0)$; 5) совокупности $Q_0 = Q_0(t_*, x_0)$, $Q^* = Q^*(t_*, x_0)$, использованные при построении оптимальной программы последней линейной задачи; 6) начальный участок оптимальной программы $u^0(t|t_*, x_0)$, $t \in [t_*, t_* + 2h]$.

Процесс управления стартует в момент t_* , когда регулятор начинает подавать на вход объекта управления управляющее воздействие $u^*(t) = u^0(t|t_*, x_0)$, $t \geq t_*$.

Предположим, что процесс управления проведен на промежутке времени $[t, \tau[$, в результате которого выработано управляющее воздействие $u^*(t)$, $t \in [t, \tau[$. Пусть под действием этого управления и реализовавшегося возмущения $w^*(t)$, $t \in [t, \tau[$, объект управления в момент τ оказался в состоянии $x^*(\tau)$, информация о котором поступила в регулятор. Кроме этой информации оптимальный регулятор хранит в памяти данные, полученные в предыдущий момент $\tau - h$: 1) точки переключения $t_i^0(\tau - h, x^*(\tau - h))$, $i = \overline{1, p(\tau - h)}$; 2) значение потенциала $v(\tau - h, x^*(\tau - h))$; 3) оптимальное значение $\alpha^0(\tau - h, x^*(\tau - h))$ критерия качества задачи (1); 4) оптимальную опору $K_{om}^0(\tau - h, x^*(\tau - h))$ линейной задачи (4) при $\alpha = \alpha^0(\tau - h, x^*(\tau - h))$; 5) совокупности $Q_0(\tau - h, x^*(\tau - h))$, $Q^*(\tau - h, x^*(\tau - h))$, использованные при решении последней линейной задачи. Функциональная форма задачи (4), которую оптимальный регулятор решил в момент $\tau - h$, имеет вид:

$$\beta(\alpha) = \min \beta, q_*(\alpha, \tau - h) \leq \sum_{t \in T_h(\tau - h)} f_h(t)u(t) + f_l \beta \leq q^*(\alpha, \tau - h), |u(t)| \leq L, t \in T_h(\tau - h), \quad (13)$$

где $q_*(\alpha, \tau - h) = q_*(\alpha) - G(\tau - h)x^*(\tau - h)$, $q^*(\alpha, \tau - h) = q^*(\alpha) - G(\tau - h)x^*(\tau - h)$, $G(\tau - h) = HF(t^*, \tau - h)$, $T_h(\tau - h) = \{\tau - h, \tau, \dots, t^* - h\}$.

Имея эту информацию, оптимальный регулятор начинает параллельно осуществлять следующие операции:

1. Процедуру доводки с начальными значениями точек переключения $t_i^0(\tau - h, x^*(\tau - h))$, $i = \overline{1, p(\tau - h)}$, и начальным состоянием $x^*(\tau)$;

2. Решение линейной задачи (4) с $\alpha = \alpha^0(\tau - h, x^*(\tau - h)) - \lambda$, начальной опорой $K_{om}^0(\tau - h, x^*(\tau - h))$ и совокупностями $Q_0(\tau - h, x^*(\tau - h))$, $Q^*(\tau - h, x^*(\tau - h))$ ($\lambda > 0$ – параметр метода);

3. Решение линейной задачи (4) с $\alpha = \alpha^0(\tau - h, x^*(\tau - h)) + \lambda$, начальной опорой $K_{om}^0(\tau - h, x^*(\tau - h))$ и совокупностями $Q_0(\tau - h, x^*(\tau - h))$, $Q^*(\tau - h, x^*(\tau - h))$.

Функциональную форму задачи (4), которую оптимальный регулятор должен решить в момент τ , запишем в виде:

$$\beta(\alpha) = \min \beta, \tilde{q}_*(\alpha, \tau) \leq \sum_{t \in T_h(\tau)} f_h(t)u(t) + f_l \beta \leq \tilde{q}^*(\alpha, \tau), \quad (14)$$

$$u^*(\tau - h) \leq u(\tau - h) \leq u^*(\tau - h), |u(t)| \leq L, t \in T_h(\tau)$$

где $\tilde{q}_*(\alpha, \tau) = q_*(\alpha, \tau - h) - \Delta q(\alpha, \tau - h)$, $\tilde{q}^*(\alpha, \tau) = q^*(\alpha, \tau - h) - \Delta q(\alpha, \tau - h)$, $\Delta q(\alpha, \tau - h) = \int_{\tau - h}^{\tau} G(t)w^*(t)dt$, $T_h(\tau) = \{\tau, \tau + h, \dots, t^* - h\}$.

Задачи (13), (14) отличаются между собой лишь векторами ограничений, причем это отличие $\Delta q(\alpha, \tau - h)$ тем меньше, чем меньше период квантования h . В этой ситуации упомянутый выше двойственный метод быстро строит решение задачи (14), взяв в качестве начальных данных решение задачи (13).

Если процедура доводки сходится, то по ее результатам информация 1)–5), использованная для момента τ , обновляется для момента $\tau + h$. В противном случае, решая линейные задачи 2., 3., добиваемся такой точности аппроксимации, при которой станут выполняться условия перехода к процедуре доводки и сходимость последней. Если при решении линейных задач 2., 3. в ходе итераций двойственного метода возникла ситуация, когда не существует конечного шага $\sigma > 0$, при котором появляется новый нуль у функции $\delta_h(t, \sigma)$, $t \in T_h(\tau)$, то это означает, что в линейных задачах нет допустимых управлений, т.е. текущее состояние $x^*(\tau)$ вышло за пределы множества управляемости.

Управление $u^0(t|\tau, x^*(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + 2h]$, подается на вход объекта управления, начиная с момента $\tau + s^*(\tau)$, где $s^*(\tau)$ – время, потраченное на осуществление операций 1., 2., 3. Как показано в [3], описанные операции по реализации оптимальной обратной связи могут быть с помощью существующих микропроцессоров осуществлены очень быстро. Поэтому

предложенные методы можно применять для оптимального управления динамическими системами достаточно высокого порядка. При этом задержки $s^*(\tau)$, $\tau \in T_h$, которые вызваны выполнением указанных выше операций, не оказывают существенного влияния на качество переходных процессов [3].

6. Пример

Предложенный метод проиллюстрируем на следующей задаче ОУ двухмассовой колебательной системой (рис. 1):

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= \min(x_3^2(10) + x_4^2(10)), \\ \dot{x}_1 &= x_3, \dot{x}_2 = x_4, \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + 0.5u, \dot{x}_4 = 0.1x_1 - 1.02x_2, \\ x_1(0) &= x_2(0) = 0, x_3(0) = 2, x_4(0) = 1, x_1^2(10) + x_2^2(10) - 2 \leq 0, |u(t)| \leq 1, t \in [0, 10], \end{aligned} \quad (15)$$

где $x_1 = x_1(t)$ – отклонение в момент времени t от положения равновесия первой массы, $x_2 = x_2(t)$ – отклонение от положения равновесия второй массы, $x_3 = \dot{x}_1/\dot{t}$, $x_4 = \dot{x}_2/\dot{t}$, $u = u(t)$ – значение скалярного управляющего воздействия.

Задача (15) является частным случаем (1) с элементами

$$\begin{aligned} t_* &= 0, t^* = 10, n = 4, \varphi_0(x) = x_3^2 + x_4^2, \varphi_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2, L = 1, x^* = (0 \ 0 \ 0 \ 0), \varphi_0^* = 0, \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & -1.02 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, c_0 = c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, D_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Результат решения задачи (15): начальное значение оптимальной программы $u^0(0) = -1$; ее точки переключения $t_1^0 = 2.420398$, $t_2^0 = 6.177214$, $t_3^0 = 9.520199$; терминальное состояние $x^0(10) = (1.413023, 0.058022, -0.415323, -0.613213)$; значение потенциала $v = 0.575278$; значение критерия качества $\alpha^0 = \varphi_0(x^0(10)) = 0.548523$; $\varphi_1(x^0(10)) = 10^{-13}$.

Приведем результаты процедуры предводки для построения приближенного решения задачи (15) в классе дискретных управлений с периодом квантования $h=0.04$. Точки переключения оптимальной программы задачи (15) попали на следующие интервалы: $[2.4, 2.44]$, $[6.16, 6.2]$, $[9.52, 9.56]$. На этих интервалах значения оптимальной программы заменили на -0.019891 , -0.139318 , 0.990045 . На остальных интервалах значения программы оставили прежними. По построенной дискретной программе получились следующие результаты: $x_h(10) = (1.413185, 0.058099, -0.415506, -0.613157)$; $\varphi_0(x_h(10)) = 0.548607$, $\varphi_1(x_h(10)) = 0.000468$. Оптимальное значение критерия качества задачи (15) ухудшилось на 0.000084 .

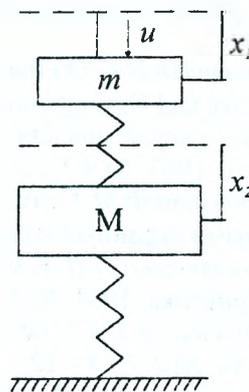


Рис. 1.

Перейдем к построению позиционного решения задачи (15). Пусть на рассматриваемую систему действует неизвестное оптимальному регулятору кусочно-непрерывное возмущение, т.е. поведение реальной системы управления описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \dot{x}_2 = x_4, \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + 0.5u, \dot{x}_4 = 0.1x_1 - 1.02x_2 + w, \\ w(t) &= w^*(t) = 0.1 \sin 2t, t \in [0, 7]; w(t) = w^*(t) \equiv 0, t \in [7, 10]. \end{aligned}$$

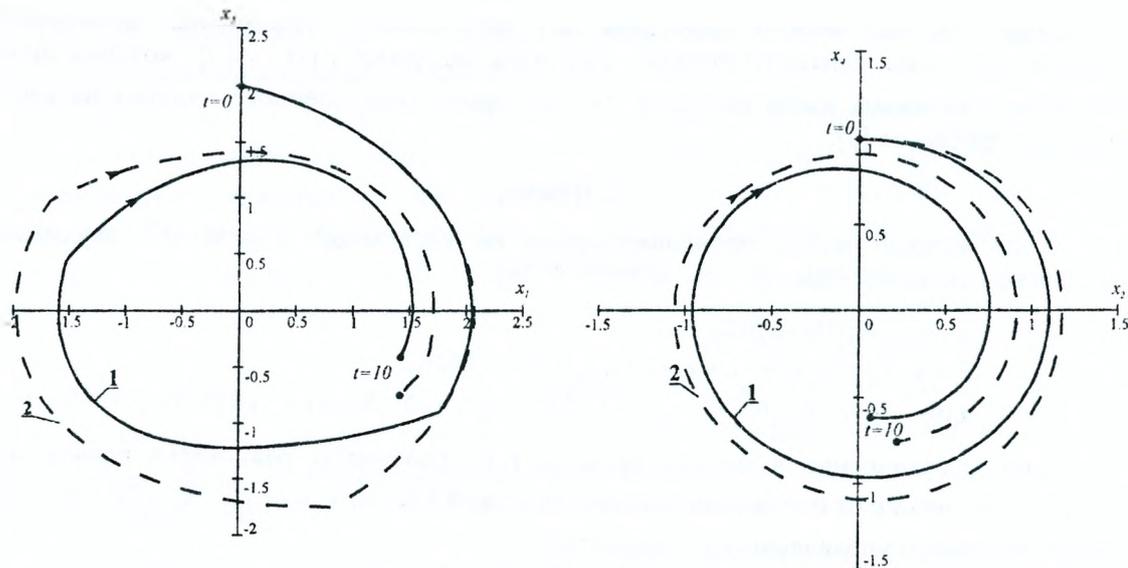


Рис. 2.

Получились следующие результаты: начальное значение реализации оптимальной обратной связи $u^*(0) = -1$; ее точки переключения $t_1 = 3.157418$, $t_2 = 6.135885$, $t_3 = 9.62848$; терминальное состояние $x^*(10) = (1.398611, 0.209492, -0.758997, -0.754491)$; значение критерия качества $\varphi_0(x^*(10)) = 1.145334$; $\varphi_1(x^*(10)) = -10^{-9}$. Количество итераций процедуры доводки в процессе решения не превышало шести.

На рис. 2 изображены проекции на фазовые плоскости $x_1 x_3$, $x_2 x_4$ траекторий системы (15), порожденных 1) оптимальной программой $u^0(t)$, $t \in T$, (возмущение отсутствует) – кривая 1, 2) реализацией оптимальной обратной связи $u^*(t)$, $t \in T$, и возмущением $w^*(t)$, $t \in T$, – кривая 2.

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 6. С. 1294 – 1299.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 4. С. 3 – 19.
3. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 838 – 859.
4. Gabasov R., Kirillova F.M., Balashevich N.V. On the Synthesis Problem for Optimal Control Systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 2001. Vol. 39. No. 4. P. 1008 – 1042.
5. Габасов Р., Лубочкин А.В. Синтез регулятора для одной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // АиТ. 1997. № 9. С. 3 – 14.
6. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. Оптимизация многомерных систем управления с параллелепипедными ограничениями // АиТ. 2002. № 3. С. 3 – 26.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. К методам стабилизации динамических систем // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 67 – 77.
8. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Ружицкая Е.А. Стабилизация перевернутого маятника // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т. 44. № 2. С. 9 – 12.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Ружицкая Е.А. Демпфирование и стабилизация маятника при больших начальных возмущениях // Изв. РАН. ТиСУ. 2001. № 1. С. 29 – 38.
10. Габасов Р., Лубочкин А.В. Стабилизация линейных динамических систем оптимальными управлениями линейно-квадратичных задач // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 556 – 565.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Мн.: Наука и техника, 1974.