Доклады Национальной академии наук Беларуси

2003 ноябрь—декабрь Том 47 № 6

УДК 517.977

Р. ГАБАСОВ, член-корреспондент Ф. М. КИРИЛЛОВА, Т. Г. ХОМИЦКАЯ

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В РЕЖИМЕ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

Белорусский государственный университет,
Институт математики НАН Беларуси

Поступило 01.09.2003

1. Пусть $T=[t_*,\ t^*]$, $t_*<t^*<+\infty$, — промежуток управления, $A(t)$, $b(t)$, $t\in T$, — кусочно-непрерывные $n\times n$-матричная и n-векторная функции, $\varphi(x)$, $x\in R^n$, — выпуклая гладкая бесконечно большая функция, $\varphi^*=\varphi(x^*)=\min\ \varphi(x)$, $x\in R^n$.

В классе скалярных кусочно-непрерывных управляющих воздействий $u(t)$, $t\in T$, рассмотрим терминальную линейно-выпуклую задачу оптимального управления (ОУ)

$$\alpha^0=\min\varphi(x(t^*)),\quad \dot{x}=A(t)x+b(t)u,\quad x(t_*)=x_0,\quad |u(t)|\le 1,\quad t\in T, \tag{1}$$

где $x=x(t)$ — n-вектор состояния системы управления в момент времени t, $x_0\in R^n$ — заданное начальное состояние.

Кусочно-непрерывное управление $u^0(t)$, $|u^0(t)|\le 1$, $t\in T$, назовем *оптимальной программой*, если на соответствующей ей траектории $x^0(t)$, $t\in T$, критерий качества задачи (1) достигает минимального значения: $\alpha^0=\varphi(x^0(t^*))=\min\ \varphi(x(t^*))$, где минимум берется по всем кусочно-непрерывным функциям (программам) $u(t)$, $t\in T$.

Положив $X^\alpha=\{x\in R^n\ :\ \varphi(x)\le\alpha\}$, $\alpha\in R$, запишем задачу (1) в эквивалентном виде:

$$\alpha^0=\min\alpha,\quad \dot{x}=A(t)x+b(t)u,\quad x(t_*)=x_0,\quad x(t^*)\in X^\alpha,\quad |u(t)|\le L,\quad t\in T. \tag{2}$$

Оптимальную программу задачи (2) будем строить с помощью двух процедур — вычисления оптимальной программы кусочно-линейной аппроксимации задачи (2) в классе дискретных управлений и доводки.

О п р е д е л е н и е. Программу $u(t)$, $t\in T$, назовем дискретной программой (с периодом квантования h, $h=(t^*-t_*)/N$, N — натуральное число), если $u(t)=u(t_k)$, $t\in[t_k,\ t_{k+1}[$, $t_k=t_*+kh$, $k=\overline{0,\ N-1}$.

Первая процедура. *Вычисление оптимальной программы для кусочно-линейной аппроксимативной задачи.* Пусть $\varphi(y)$, $y\in R^n$, — гладкая выпуклая функция. Совокупность единичных n-векторов $Q=\{h_i,\ i\in I\}$, $I=\{1,\ 2,\ldots,\ m\}$, $m>n$, назовем векторами аппроксимации, если для любого компакта $Y^\alpha=\{y\in R^n:\varphi(y)\le\alpha\}$ ограничена его внешняя аппроксимация $\bar{Y}^\alpha=\{y\in R^n\ :\ h_i'y\le g_i(\alpha),\quad i\in I\}$ ($g_i(\alpha)=\max\ h_i'y$, Y^α).

Пусть $y_\alpha\in\partial\bar{Y}^\alpha$; $\bar{h}=\operatorname{grad}\varphi(y_\alpha)/\|\operatorname{grad}\varphi(y_\alpha)\|$. Число $\varepsilon=\varepsilon(y_\alpha,\ Y^\alpha)=\bar{h}'(y_\alpha-\bar{y}_\alpha)=\max\bar{h}'(y_\alpha-y)$, $y\in Y^\alpha$, назовем отклонением точки y_α от множества Y^α, $\bar{y}_\alpha=\bar{y}_\alpha(y_\alpha,\ Y^\alpha)$ — экстремальной точкой множества Y^α, соответствующей вектору $\bar{h}$.

Выберем для X^α векторы аппроксимации Q^α и построим $\bar{X}^\alpha$. В классе дискретных программ рассмотрим кусочно-линейную аппроксимацию задачи (2)

$$\bar{\alpha}^0 = \min \alpha, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \quad x(t^*) \in \bar{X}^\alpha, \quad |u(t)| \le L, \quad t \in T. \tag{3}$$

Эта задача решается с помощью линейной задачи ОУ:

$$\begin{gathered}\beta(\alpha) = \min \beta, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l, \\ x(t^*) \in \bar{X}^\alpha, \quad |u(t)| \le L, \quad t \in T, \quad (l = x^* - x_0).\end{gathered} \tag{4}$$

Как и в [1], для нее может быть разработан быстрый двойственный метод вычисления оптимальных программ, который обобщает метод [1] на задачи ОУ с параметрами.

Функциональная форма задачи (4) имеет вид:

$$\beta(\alpha) = \min \beta, \quad \sum_{t \in T_h} f_h(t)u(t) + f_l\beta \le q(\alpha), \quad |u(t)| \le L, \quad t \in T.$$

Здесь

$$f_h(t) = \int_t^{t+h} HF(t^*, \ \tau)b(\tau)d\tau, \ t \in T_h = \{t_*, \ \ t_* + h, \dots, \ \ t^* - h\}, \ f_l = HF(t^*, \ \ t_*)1,$$

$$q(\alpha) = \begin{pmatrix} g_i(\alpha), \\ i \in I \end{pmatrix} - HF(t^*, \ \ t_*)x_0, \ H = \begin{pmatrix} h_i', \\ i \in I \end{pmatrix}, \ F(t, \ \ \tau) = F(t)F^{-1}(\tau), \ \dot{F} = A(t)F, \ F(t_*) = E.$$

При $\alpha = \varphi^*$ задача (4) сводится к следующей

$$\beta^* = \min \beta, \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l, \quad x(t^*) = x^*, \quad |u(t)| \le L, \quad t \in T. \tag{5}$$

Лемма 1. $\beta(\alpha)$, $\alpha \in R$, — *непрерывная монотонно убывающая функция, для которой* $\beta(\varphi^*) = \beta^*$; $\beta(\alpha) \to -\infty$ *при* $\alpha \to \infty$.

Лемма 2. *Оптимальное значение* $\bar{\alpha}^0$ *критерия качества задачи* (3) *равно минимальному корню уравнения* $\beta(\alpha) = 0$.

Решение задачи (3) начнем с решения задачи (5). Если $\beta^* = \beta(\varphi^*) < 0$, то x^* — внутренняя точка множества достижимости системы (1), в задаче (3) существует множество решений, на которых можно ввести дополнительный критерий качества. В случае $\beta^* = 0$, согласно лемме 2, φ^* — минимальное значение критерия качества задачи (3): $\bar{\alpha}^0 = \varphi^*$; построенное программное решение $u_\alpha^0(t)$, $x_\alpha^0(t)$, $t \in T$, задачи (5) является программным решением задачи (3). При $\beta^* > 0$ находим минимальный корень уравнения $\beta(\alpha) = 0$.

Вычислим $\varepsilon^\alpha = \varepsilon(x_\alpha^0(t^*), \ \ X^\alpha)$. Если при выбранном (число ε подбирается так, чтобы последующая процедура доводки сходилась) $\varepsilon_0 > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon^\alpha \le \varepsilon_0$, то переходим ко второй процедуре. Если $\varepsilon^\alpha > \varepsilon_0$, то в Q^α добавим новый вектор $\bar{h} = \operatorname{grad} \varphi(x_\alpha^0(t^*)) / \| \operatorname{grad} \varphi(x_\alpha^0(t^*)) \|$, по обновленному множеству Q^α построим $\bar{X}^\alpha$. Программное решение новой задачи (3) строится с помощью упомянутого выше двойственного метода. Через конечное число коррекций терминальных ограничений будет получено программное решение задачи (3), на котором выполняются условия перехода к процедуре доводки.

Вторая процедура. Пусть $\bar{u}(t)$, $t \in T$, — оптимальная программа задачи (3), удовлетворяющая условию перехода к доводке; $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, ..., $\bar{t}_p$ — точки ее переключения. Процедура доводки для построения программного решения задачи (2) в классе кусочно-непрерывных функций основана на решении уравнений доводки

$$\psi'(t^*)F(t^*, \ \ t_k)b(t_k) = 0, \quad k = \overline{1, \ p}, \quad (\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \quad \psi(t^*) = \partial\varphi(x(t^*))/\partial x). \tag{6}$$

Пусть $\dot{\delta}(t_k) \ne 0$, $k = \overline{1, \ p}$, где $\delta(t) = \psi'(t)b(t)$. Тогда матрица Якоби системы (6) невырождена. В качестве начальных приближений возьмем моменты $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, ..., $\bar{t}_p$, найденные после решения вспомогательной задачи (4) и, решая систему (6) методом Ньютона, построим оптимальную программу задачи (2) в классе кусочно-непрерывных функций.

Описанный метод можно применить для построения оптимальных позиционных решений системы (1) в режиме реального времени.

2. Применим метод построения оптимальных управлений (п. 1) для стабилизации в режиме реального времени динамической системы с управлением

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (A \in R^{n\times n},\ b \in R^n). \tag{7}$$

Одна задача стабилизации системы (7), управляемой по Калману ограниченными обратными связями на базе методов ОУ изложена в [2]. Эта проблема для неуправляемой системы (7) при отсутствии ограничений на управление изучена в [3] на базе задач Летова—Калмана.

Будем, как и в [3], считать, что система (7) неуправляема по Калману, но является *асимптотически* управляемой [4]: для каждой $x_0 \in R^n$ найдется такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \geq 0$, что соответствующая траектория $x(t)$, $t \geq 0$, системы (7) с начальным состоянием $x(0) = x_0$ обладает свойством: $x(t) \to 0$, $t \to \infty$.

Пусть $\varphi(x)$, $x \in R^n$, ($\varphi(0) = 0$) — бесконечно большая выпуклая определенно положительная функция, h_c, $h_c > 0$, — некоторое число. Обозначим через γ^* такое число, при котором для всех γ, $0 < \gamma \leq \gamma^*$, множество

$$X^\gamma = \{x \in R^n : \varphi(x) \leq \gamma\}$$

таково, что для каждого $z \in X^\gamma$ существует такое кусочно-непрерывное управление $\omega(t|\ z)$, $|\omega(t|\ z)| \leq L$, $t \in [0,\ h_c]$, что порожденная им траектория $x(t)$, $t \in [0,\ h_c]$, системы (7) с начальным условием $x(0) = z$, попадает в момент h_c на множество X^γ.

Выберем число $\theta \geq h_c$ и введем вспомогательную (сопровождающую) задачу ОУ

$$V(z) = \min \varphi(x(\theta)), \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z, \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in [0,\ \theta]. \tag{8}$$

Обозначим: $u^0(t|\ z)$, $t \in [0,\ \theta]$, — *оптимальная программа* задачи (8) в классе кусочно-непрерывных функций; X_0 — множество $z \in R^n$, для которых задача (8) имеет решение.

Для стабилизации системы (7) используем быстрый метод вычисления программных решений задачи (8). Будем считать, что состояние системы (7) измеряется в моменты $0,\ h_c,\ 2h_c,\ \ldots$ На начальном промежутке $[0,\ h_c]$ на вход системы (7) подадим управление $u^0(t|\ x_0)$, $t \in [0,\ h_c[$. Под действием этого управления система (7) перейдет в момент h_c в состояние $x^*(h_c)$. Пусть $x^*(\tau)$ ($\tau = kh_c$, $k \geq 1$) — состояние системы (7) в момент τ, $[\tau,\ \tau + h_c]$ — произвольный промежуток. На этом промежутке на вход системы (7) подадим управление $u^0(t-\tau|\ x^*(\tau))$, $t \in [\tau,\ \tau + h_c[$. Вдоль построенной траектории $x^*(t)$, $t \geq 0$, определенно положительная функция $V(z)$, $z \in X_0$, удовлетворяет неравенству

$$V(x^*(\tau + h_c)) \leq V(x^*(\tau)),\ \tau = 0, h_c, 2h_c, \ldots$$

Отсылая в [4 — 6] за доказательством свойства $V(x^*(t)) \to 0$, $x^*(t) \to 0$, $t \to \infty$, изложим метод реализации стабилизирующей обратной связи $u^*(t)$, $t \geq 0$, в режиме реального времени.

До начала процесса стабилизации найдем оптимальную программу $u^0(t|\ z)$, $t \in T$, задачи (8) для состояния $z = x_0 \in X_0$ методом, описанным в п. 1. На начальном участке процесса стабилизации положим $u^*(t) = u^0(t|\ x_0)$, $t \in [0,\ h_c[$. Для продолжения процесса стабилизации запомним следующую информацию: 1) моменты переключения $t_i^0(x_0)$, $i = \overline{1,\ p}$; 2) оптимальное значение $V(x_0)$ критерия качества задачи (8); 3) оптимальную опору $K_{on}^0(x_0)$ линейной задачи (4) для $\gamma = V(x_0)$; 4) совокупность $Q_0 = Q_0(x_0)$, использованную при построении оптимальной программы последней линейной задачи процесса реализации. Предположим, что процесс стабилизации осуществлен на промежутке времени $[0, \ \tau + h_c[$, в результате чего выработано управляющее воздействие $u^*(t)$, $t \in [0, \ \tau + h_c[$. Обозначим через $x^*(\tau + h_c)$ состояние системы (7), в котором она оказалась в момент $\tau + h_c$. Из приведенной выше схемы видно, что для вычисления $u^*(t)$, $t \in [\tau + h_c, \tau + 2h_c[$, стабилизатору нужно знать программное решение $u^0(t - \tau - h_c | \ x^*(\tau + h_c))$, $t \in [\tau + h_c, \tau + h_c + \theta[$, задачи (8) для состояния $z = x^*(\tau + h_c)$.

По предположению, стабилизатор в предыдущий момент τ уже построил программное решение $u^0(t - \tau | \ x^*(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + \theta[$, задачи (8) для состояния $z = x^*(\tau)$. В результате решения этой задачи была получена и сохранена следующая информация: 1) точки переключения $t_i^0(x^*(\tau))$, $i = \overline{1, \ p}$; 2) оптимальное значение $V(x^*(\tau))$ критерия качества задачи (8); 3) оптимальная опора $K_{on}^0(x^*(\tau))$ линейной задачи (4) при $\gamma = V(x^*(\tau))$; 4) совокупность $Q_0(x^*(\tau))$, использованную при решении последней линейной задачи.

Функциональная форма линейной задачи (4), соответствующей задаче (8), которую стабилизатор решил в момент τ, имеет вид

$$\beta(\gamma) = \min \beta, \quad \textstyle\sum_{t \in T_h(\tau)} f_h(t - \tau) u(t - \tau) + f_1 \beta \le q(\gamma, \tau), \quad |u(t - \tau)| \le L, \quad t \in [\tau, \ \tau + \theta], \tag{9}$$

где $q(\gamma, \tau) = q(\gamma) - HF(\tau + \theta, \ \tau) x^*(\tau)$, $T_h(\tau) = \{\tau, \tau + h, \ldots, \tau + \theta - h\}$, ($h_c = k^* h$, $k^* \ge 1$).

Имея эту информацию, стабилизатор начинает решать линейную задачу (4) с $\gamma = V(x^*(\tau))$ и совокупностью $Q_0(x^*(\tau))$. Функциональную форму линейной задачи (4), которую стабилизатор должен решить в момент $\tau + h_c$, запишем следующим образом:

$$\begin{gathered} \beta(\gamma) = \min \beta, \quad \textstyle\sum_{t \in T_h(\tau)} f_h(t - \tau) u(t - \tau) + f_1 \beta \le q(\gamma, \tau), \\ u(t - \tau) \equiv u^0(t - \tau | x^*(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + h_c[, \quad |u(t - \tau)| \le L, \quad t \in [\tau + h_c, \tau + h_c + \theta[. \end{gathered} \tag{10}$$

Задачи (9), (10) отличаются между собой только условиями на концах: в задаче (9) управление $u(t)$, $t \in [\tau, \ \tau + h_c]$, выбирается, а в задаче (10) управление $u(t) = u^0(t - \tau | x^*(\tau))$, $t \in [\tau, \ \tau + h_c]$ фиксируется; управление $u(t)$, $t \in [\tau + \theta, \ \tau + h_c + \theta]$, не влияет на значение критерия качества задачи (10). В подобных ситуациях двойственный метод [1], используя оптимальную опору $K_{on}^0(\tau)$ задачи (9) в качестве начальной, быстро ее корректирует и строит оптимальную опору $K_{on}^0(\tau + h_c)$ задачи (10). Затем к полученному решению линейной задачи достаточно применить процедуру доводки. Информация 1) — 4) для момента $\tau + h_c$ обновляется.

Работа частично финансируется Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект Ф02Р-008) и Государственной программой фундаментальных исследований «Математические структуры».

Литература

1. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. // ЖВМ и МФ. 2000. Т. 40, № 6. С. 838—859.
2. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. // АиТ. 1994. № 3. С. 3—12.
3. Кириллова Ф. М. // ПММ. 1961. Т. 25, вып. 3. С. 433—439.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М. // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42, № 1. С. 18—23.
5. Балашевич Н. В. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 1999. Т. 3. С. 38—45.
6. Mayne D. Q., Rawlings J. B., Rao C. V., Scokaert P. Q. M. // Automatica. 2000. N 36. P. 789—814.

GABASOV R., KIRILLOVA F. M., KHOMITSKAYA T. G.

METHOD OF SOLUTION OF LINEAR-CONVEX OPTIMAL CONTROL PROBLEM AND ON-LINE STABILIZATION OF DYNAMIC SYSTEMS

Summary

An optimal control problem for a linear nonstationary system is under consideration. The behavior of this system is estimated by the convex performance index of terminal states. A fast algorithm for constructing optimal open-loop controls is developed. It is based on linearization of the optimal control problem and the special finishing procedure. The algorithm described is used for on-line stabilization of dynamic systems by bounded controls.