ВЕСЦІ НАЦЫЯНАЛЬНАЙ АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ № 3 2006
СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК

УДК 517.977

Т. Г. ХОМИЦКАЯ

ПРОГРАММНОЕ И ПОЗИЦИОННОЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-ВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Брестский государственный технический университет

(Поступила в редакцию 10.08.2004)

1. Постановка задачи. Общая схема решения. Пусть $T = [t_*, t^*]$, $t_* < t^* < +\infty$, — промежуток управления, $A(t)$, $b(t)$, $t \in T$, — кусочно-непрерывные $n \times n$-матричная и n-векторная функции, $\varphi(x)$, $x \in R^n$, — достаточно гладкая выпуклая функция: $\varphi(x) \to \infty$ при $\|x - x^*\| \to \infty$, x^* — точка минимума: $\varphi^* = \varphi(x^*) = \min \varphi(x)$, $x \in R^n$.

В классе скалярных кусочно-непрерывных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T$, рассмотрим линейно-выпуклую задачу оптимального управления (ОУ)

$$\alpha^0 = \min \varphi(x(t^*)),\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_0,\ x(t^*) \in X^*,\ |u(t)| \leq 1,\ t \in T. \tag{1}$$

Здесь $x = x(t)$ — n-вектор состояния системы управления в момент времени t, $u = u(t)$ — значение скалярного управляющего воздействия, $x_0 \in R^n$ — заданное начальное состояние, $X^* = \{x \in R^n : \varphi^*(x) \leq 0\}$ — ограниченное выпуклое множество, определенное с помощью выпуклой гладкой функции $\varphi^*(x)$, $x \in R^n$.

Кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t \in T$, назовем программой, если она удовлетворяет неравенству $|u(t)| \leq 1$, $t \in T$, и порожденная ею траектория $x(t)$, $t \in T$, системы $\dot{x} = A(t)x + b(t)u$, $x(t_*) = x_0$, попадает в момент $t = t^*$ на множество X^*.

Программу $u^0(t)$, $t \in T$, будем называть оптимальной, если на соответствующей ей траектории $x^0(t)$, $t \in T$, критерий качества задачи (1) достигает минимального значения: $\alpha^0 = \varphi(x^0(t^*)) = \min \varphi(x(t^*))$, где минимум берется по всем программам $u(t)$, $t \in T$. Вопрос о существовании программ и метод вычисления их (в случае существования) будет исследован позднее.

Рассмотрим вычисление оптимальной программы задачи (1) предполагая, что существуют программы, для которых выполняется условие Слейтера: $\varphi^*(x(t^*)) < 0$.

Пусть $X^\alpha = \{x \in R^n : \varphi(x) \leq \alpha\}$, $\alpha \in R$. Задачу (1) запишем в эквивалентном виде:

$$\alpha^0 = \min \alpha,\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_0,\ x(t^*) \in X^\alpha,\ x(t^*) \in X^*,\ |u(t)| \leq 1,\ t \in T. \tag{2}$$

Вычисление оптимальной программы задачи (1) осуществим с помощью двух процедур: 1) вычисления оптимальной программы кусочно-линейной аппроксимации задачи (2) в классе дискретных управлений; 2) процедуры доводки.

Управление $u(t)$, $t \in T$, назовем дискретной программой (с периодом квантования h, $h = (t^* - t_*)/N$, N — натуральное число), если $u(t) = u(t_k)$, $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $t_k = t_* + kh$, $k = \overline{0, N-1}$.

Первая процедура. С целью решения задачи (2) построим сначала кусочно-линейную аппроксимацию множеств X^α, X^*. Для этого выберем совокупность n-векторов

$$h_i,\ \|h_i\| = 1,\ i \in I = \{1, 2, \dots, m\},\ m \geq n, \tag{3}$$

в которой каждые n векторов линейно-независимы. Векторы (3) назовем векторами аппроксимации. В качестве таких векторов можно взять единичные орты e_i, $i = \overline{1,n}$.

Обозначим $r_i = h_i$, $r_{m+i} = -h_i$, $i = \overline{1,m}$, и подсчитаем числа $g_i^*(\alpha) = \max r_i' x$, $x \in X^\alpha$; $g_{*i}(\alpha) = \max r_{m+i}' x$, $x \in X^\alpha$; $y_i^* = \max r_i' x$, $x \in X^*$; $y_{*i} = \max r_{m+i}' x$, $x \in X^*$, $i \in I$.

Множества $\hat{X}^\alpha = \{x \in R^n : g_{*i}(\alpha) \leq h_i' x \leq g_i^*(\alpha), i \in I\}$, $\hat{X}^* = \{x \in R^n : y_{*i} \leq h_i' x \leq y_i^*, i \in I\}$ — кусочно-линейные аппроксимации множеств X^α, X^*.

Замечание. Для построения множества $\hat{X}^*$ в качестве начальных векторов аппроксимации можно выбрать совокупность, отличную от (3).

Под кусочно-линейной аппроксимацией задачи (2) понимается следующая задача ОУ в классе дискретных управлений:

$$\hat{\alpha}^0 = \min \alpha,\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_0,\ x(t^*) \in \hat{X}^\alpha,\ x(t^*) \in \hat{X}^*,\ |u(t)| \leq 1,\ t \in T. \tag{4}$$

Для решения этой задачи будем использовать вспомогательную линейную задачу

$$\begin{gathered}\beta(\alpha) = \min \beta,\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l,\\ x(t^*) \in \hat{X}^\alpha,\ x(t^*) \in \hat{X}^*,\ |u(t)| \leq 1,\ t \in T,\ (\beta \in R),\end{gathered} \tag{5}$$

положив $l = \bar{x} - x_0$, где $\bar{x} = F(t_*, t^*)\bar{x}$, $\bar{x}$ — точка минимума целевой функции $\varphi(x)$, $x \in R^n$, на терминальном множестве X^*: $\bar{\varphi} = \varphi(\bar{x}) = \min \varphi(x)$, $x \in X^*$.

Для задачи (5) разработан быстрый двойственный метод вычисления оптимальных программ [1], который обобщает метод [2] на задачи ОУ с параметрами.

Введем сопровождающую линейную задачу

$$\hat{\beta} = \min \beta,\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l,\ x(t^*) \in \hat{X}^*,\ |u(t)| \leq 1,\ t \in T.$$

Пусть $\hat{u}^0(t)$, $\hat{x}^0(t)$, $t \in T$, — ее программное решение. Определим $\hat{\varphi} = \varphi(\hat{x}^0(t^*))$. Если $\hat{\beta} = \beta(\hat{\varphi}) > 0$, то в задаче (4) нет допустимых управлений. При $\hat{\beta} = 0$ число $\hat{\varphi}$ равно минимальному значению критерия качества задачи (4): $\hat{\alpha}^0 = \hat{\varphi}$; программное решение сопровождающей задачи является программным решением задачи (4). Рассмотрим случай когда $\hat{\beta} < 0$.

При $\alpha = \bar{\varphi}$ задача (5) сводится к следующей:

$$\bar{\beta} = \min \beta,\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_\beta = x_0 + \beta l,\ x(t^*) = \bar{x},\ |u(t)| \leq 1,\ t \in T. \tag{6}$$

Если $\bar{\beta} = \beta(\bar{\varphi}) < 0$, то $\bar{x}$ — внутренняя точка множества достижимости системы (1); задача (4) не является экстремальной задачей. При $\bar{\beta} = 0$ число $\bar{\varphi}$ равно минимальному значению критерия качества задачи (4): $\hat{\alpha}^0 = \bar{\varphi}$; построенное программное решение $u_\alpha^0(t)$, $x_\alpha^0(t)$, $t \in T$, задачи (6) является программным решением задачи (4). Для дальнейшего изложения будем предполагать, что $\bar{\beta} > 0$.

Лемма 1. $\beta(\alpha)$, $\alpha \in [\bar{\varphi}, \hat{\varphi}]$, — *непрерывная монотонно убывающая функция.*

Лемма 2. *Оптимальное значение* $\hat{\alpha}^0$ *критерия качества задачи (4) равно минимальному корню уравнения* $\beta(\alpha) = 0$.

Уравнение $\beta(\alpha) = 0$ можно решить любым из многочисленных известных методов.

Вычислим локальную точность аппроксимации $\hat{\varepsilon}$ множества X^α множеством $\hat{X}^\alpha$. Для этого найдем вектор $\hat{r} = \operatorname{grad} \varphi(x_\alpha^0(t^*))/\|\operatorname{grad} \varphi(x_\alpha^0(t^*))\|$ и решим задачу $\hat{\varepsilon}(x_\alpha^0(t^*), X^\alpha) = \max \hat{r}'(x_\alpha^0(t^*) - x)$, $x \in X^\alpha$. Искомая точность — число $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(x_\alpha^0(t^*), X^\alpha)$.

Определим вектор $\tilde{r}^* = \operatorname{grad}\varphi^*(x^0_\alpha(t^*))/\|\operatorname{grad}\varphi^*(x^0_\alpha(t^*))\|$. Локальную точность аппроксимации множества X^* множеством $\tilde{X}^*$ характеризует число $\tilde{\varepsilon}^* = \tilde{\varepsilon}^*(x^0_\alpha(t^*), X^*) = \max \tilde{r}^{*\prime}(x^0_\alpha(t^*) - x)$, $x \in X^*$.

Среди чисел $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon}^*$ найдем наибольшее: $\bar{\varepsilon} = \max\{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}^*\}$, которое назовем точностью аппроксимации программного решения задачи (1) программным решением задачи (4). Если при выбранном[*)] $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\bar{\varepsilon} \le \varepsilon$, то перейдем к процедуре доводки.

При $\tilde{\varepsilon} > \varepsilon$ к векторам r_i, $i \in I$, добавим вектор $\tilde{r}$. Вычислим $\tilde{g}^*(\alpha) = \max \tilde{r}'x$, $x \in X^\alpha$; $\tilde{g}_*(\alpha) = \min \tilde{r}'x$, $x \in X^\alpha$, и добавим в задачу (4) новое терминальное ограничение: $\tilde{g}_*(\alpha) \le \tilde{r}'x(t^*) \le \tilde{g}^*(\alpha)$. В случае $\tilde{\varepsilon}^* > \varepsilon$ положим $r^*_i = r_i$, $i = \overline{1,2m}$; $I^* = I$, и к этим векторам добавим вектор $\tilde{r}^*$. Вычислим $\tilde{y}^* = \max \tilde{r}^{*\prime}x$, $x \in X^*$; $\tilde{y}_* = \min \tilde{r}^{*\prime}x$, $x \in X^*$, и добавим новое терминальное ограничение: $\tilde{y}_* \le \tilde{r}'^*x(t^*) \le \tilde{y}^*$ в задачу (4).

Для дальнейшего повышения точности аппроксимации задачу (4) решим с новыми терминальными ограничениями, которые получаются из предыдущих добавлением одного или двух новых ограничений, построенных по описанным выше правилам. Если количество новых ограничений превысит n для множества $\tilde{X}^\alpha$, то из добавленных в $\tilde{X}^\alpha$ удалим одно ограничение с наибольшим ε_i, $i = \overline{1,2m}$, где $\varepsilon_i = g^*_i(\alpha) - r'_i x^0_\alpha(t^*)$, $\varepsilon_{m+i} = -g_{*i}(\alpha) - r'_{m+i}x^0_\alpha(t^*)$, $i \in I$. Соответственно, если количество новых ограничений превысит n для множества $\tilde{X}^*$, то из добавленных в $\tilde{X}^*$ удалим одно ограничение с наибольшим ε^*_i, $i = \overline{1,2m}$, где $\varepsilon^*_i = y^*_i - r'^*_i x^0_\alpha(t^*)$, $\varepsilon^*_{m+i} = -y_{*i} - r'^*_{m+i}x^0_\alpha(t^*)$, $i \in I^*$. Программное решение задачи (4), на котором выполняется условие перехода к процедуре доводки, будет получено через конечное число коррекций терминальных ограничений. Перейдем к процедуре доводки.

Вторая процедура. Пусть $\bar{u}(t)$, $t \in T$, — оптимальная программа вспомогательной задачи (5), удовлетворяющая условию перехода к процедуре доводки; $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_{p-1}$ — точки переключения программы; $\bar{\nu}$ — вектор потенциалов. Согласно [3], для оптимальности программы $u(t)$, $t \in T$, задачи (1) необходимо и достаточно существования такого потенциала $\nu \ge 0$, что вдоль траектории $x(t)$, $t \in T$, прямой системы (1) и траектории $\psi(t)$, $t \in T$, сопряженной системы $\dot{\psi} = -A'(t)\psi$ с начальным условием $\psi(t^*) = \partial\varphi(x(t^*))/\partial x + \nu\, \partial\varphi^*(x(t^*))/\partial x$ выполняется условие максимума: $\psi'(t)b(t)u(t) = \max_{|u|\le 1} \psi'(t)b(t)u$, $t \in T$.

Из этого следует, что число ν и моменты переключения $t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$ оптимальной программы $u(t)$, $t \in T$, задачи (1) являются решением уравнений:

$$\psi'(t^*)F(t^*, t_j)b(t_j) = 0,\ j = \overline{1, p-1};\ \varphi^*(x(t^*)) = 0. \tag{7}$$

Систему уравнений (7) назовем уравнениями доводки.

Подсчитаем $\nu = \|\sum_{i\in I^*_{\text{оп}}} \bar{\nu}_i r^*_i\|/\|\sum_{i\in I^\alpha_{\text{оп}}} \bar{\nu}_i r_i\|$, где $I^*_{\text{оп}}$ — множество опорных индексов $i \in I_{\text{оп}}$, соответствующее векторам аппроксимации r^*_i; $I^\alpha_{\text{оп}} = I_{\text{оп}} \backslash I^*_{\text{оп}}$. Взяв в качестве начальных приближений число ν и моменты $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_{p-1}$, найденные после решения вспомогательной линейной задачи (5), решим систему (7) методом Ньютона. По полученному решению построим оптимальную программу задачи (1) в классе кусочно-непрерывных функций.

Первая фаза. Опишем метод вычисления начальной программы задачи (1). Для этого введем задачу ОУ первой фазы. Пусть $u_0(t)$, $t \in T$, — произвольная кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая ограничению $|u_0(t)| \le 1$, $t \in T$; $x_0(t)$, $t \in T$, — соответствующая ей траектория системы (1). Подсчитаем невязку терминального ограничения: $\varrho_0 = \varphi^*(x_0(t^*))$.

Если $\varrho_0 \le 0$, то $u_0(t)$, $t \in T$, — программа задачи (1). При $\varrho_0 > 0$ рассмотрим задачу ОУ:

$$\varrho^0 = \min \varrho,\ \dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_*) = x_0,\ \varphi^*(x(t^*)) - \varrho \le 0,\ 0 \le \varrho \le \varrho_0,\ |u(t)| \le 1,\ t \in T. \tag{8}$$

[*)] Число ε подбирается так, чтобы последующая процедура доводки сходилась.

Управление $u_0(t)$, $t \in T$, допустимо в задаче (8).

Задача (8) — нелинейная задача ОУ. Она проще задачи (2). Поэтому для ее решения можно использовать метод, который описан выше.

Если $\varrho^0 > 0$, то в задаче (1) нет допустимых управлений. При $\varrho^0 = 0$ решение задачи (8) является программой задачи (1).

2. Синтез оптимальных управлений типа обратной связи. Как известно, оптимальные программы позволяют лишь выявлять потенциальные возможности систем управления. В реальных процессах управления используются, как правило, управления типа обратной связи. Определим ОУ типа (дискретной) обратной связи (с периодом реализации $h_0 = kh$, $k \geq 1$). С этой целью погрузим задачу (1) в семейство задач

$$\varphi(x(t^*)) \to \min, \dot{x} = A(t)x + b(t)u, x(\tau) = z, x(t^*) \in X^*, |u(t)| \leq 1, t \in T(\tau) = [\tau, t^*], \quad (9)$$

зависящее от скаляра $\tau \in T_{h_0}$ и n-вектора z.

Пусть $u^0(t|\tau, z)$, $t \in T(\tau)$, — оптимальная программа задачи (9) для позиции (τ, z), X_τ — множество состояний z, для которых существуют оптимальные программные решения задачи (9). Функция

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau|\tau, z), z \in X_\tau, \tau \in T_{h_0}, \quad (10)$$

называется ОУ типа (дискретной) обратной связи (позиционным решением задачи (1)), построение функции (10) — синтезом оптимальной обратной связи (синтезом оптимальной системы).

Использование обратных связей (10) предполагает, что в процессе управления состояния системы (1) измеряются в дискретные моменты $t \in T_{h_0}$ и по этой информации вырабатываются управляющие воздействия.

Замену в (1) управления u на функцию (10) называют замыканием системы управления. Траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u^0(t, x) + w(t), x(t_*) = x_0, \quad (11)$$

при постоянно действующем кусочно-непрерывном возмущении $w(t)$, $t \in T$, представляет решение уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u(t) + w(t), x(t_*) = x_0,$$
$$u(t) = u^0(\tau, x(\tau)), t \in [\tau, \tau + h_0[, \tau = t_* + sh_0, s = \overline{0, N-1}.$$

Будем считать, что уравнение (11) описывает поведение физического прототипа математической модели (1). В этом случае функция $w(t)$, $t \in T$, содержит неточности математического моделирования и постоянно действующие возмущения.

Пусть по ходу некоторого конкретного процесса управления реализуется возмущение $w^*(t)$, $t \in T$. Ему будет соответствовать траектория $x^*(t)$, $t \in T$, замкнутой системы (11), удовлетворяющая тождеству

$$\dot{x}^*(t) \equiv A(t)x^*(t) + b(t)u^0(t, x^*(t)) + w^*(t), t \in T. \quad (12)$$

Из тождества (12) видно, что в процессе управления обратная связь (10) используется неполностью (не для всех $z \in R^n$). Нужны лишь ее значения $u^*(t) = u^0(t, x^*(t))$, $t \in T_{h_0}$, вдоль изолированной траектории $x^*(t)$, $t \in T$. При этом нет необходимости знать функцию $u^*(t)$, $t \in T_{h_0}$, заранее, достаточно уметь вычислять текущие значения $u^*(\tau)$ по мере поступления измерений текущих состояний $x^*(\tau)$. Функцию $u^*(t)$, $t \in T$, назовем реализацией оптимальной обратной связи в конкретном процессе управления.

Будем говорить, что построение $u^*(t)$, $t \in T$, осуществляется в режиме реального времени, если в каждой текущей позиции $(\tau, x^*(\tau))$ время $s(\tau)$ вычисления значения $u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau))$ не превосходит $h_0 > 0$. Устройство, способное выполнять такую работу, называется оптимальным регулятором.

Алгоритм работы оптимального регулятора базируется на двойственном методе [1].

До начала процесса управления оптимальный регулятор вычисляет оптимальную программу $u^0(t|t_*, x_0)$, $t \in T$, для начальной позиции (t_*, x_0). Время на выполнение этой работы не имеет никакого значения. Для дальнейшего процесса управления запоминается следующая информация: 1) моменты переключения $t_i^0 = t_i^0(t_*, x_0)$, $i = \overline{1, p(t_*) - 1}$; 2) оптимальное значение $\alpha^0 = \alpha^0(t_*, x_0)$ критерия качества задачи (1); 3) оптимальная опора $K^0_{on}(t_*, x_0)$ линейной задачи (5) для $\alpha = \alpha^0(t_*, x_0)$; 4) совокупность векторов аппроксимации r_i, $i \in I(t_*)$, использованная при построении оптимальной программы последней линейной задачи; 5) начальный участок оптимальной программы $u^0(t|t_*, x_0)$, $t \in [t_*, t_* + 2h_0]$; 6) значение потенциала $\nu = \nu(t_*, x_0)$.

Процесс управления стартует в момент t_*, когда регулятор начинает подавать на вход объекта управления управляющее воздействие $u^*(t) = u^0(t|t_*, x_0)$, $t \geq t_*$.

Предположим, что процесс управления проведен на промежутке времени $[t_*, \tau[$, в результате которого выработано управляющее воздействие $u^*(t)$, $t \in [t_*, \tau[$. Пусть под действием этого управления и реализовавшегося возмущения $w^*(t)$, $t \in [t_*, \tau]$, объект управления в момент τ оказался в состоянии $x^*(\tau)$, информация о котором поступила в регулятор. Кроме этой информации оптимальный регулятор хранит в памяти данные, полученные в предыдущий момент $\tau - h_0$: 1) точки переключения $t_i^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$, $i = \overline{1, p(\tau - h_0) - 1}$; 2) оптимальное значение $\alpha^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$ критерия качества задачи (1); 3) оптимальную опору $K^0_{\text{оп}}(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$ линейной задачи(5) при $\alpha = \alpha^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$; 4) совокупность векторов аппроксимации r_i, $i \in I(\tau - h_0)$, использованную при решении последней линейной задачи; 5) значение потенциала $\nu(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$. Имея эту информацию, оптимальный регулятор начинает параллельно осуществлять следующие операции:

a) процедуру доводки с начальными значениями точек переключения $t_i^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$, $i = \overline{1, p(\tau - h_0) - 1}$, и начальным состоянием $x^*(\tau)$;

b) решение линейной задачи (5) с $\alpha = \alpha^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0)) - \lambda$, начальной опорой $K^0_{\text{оп}}(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$ и векторами аппроксимации r_i, $i \in I(\tau - h_0)$, ($\lambda > 0$ — параметр метода);

c) решение линейной задачи (5) с $\alpha = \alpha^0(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0)) + \lambda$, начальной опорой $K^0_{\text{оп}}(\tau - h_0, x^*(\tau - h_0))$ и векторами аппроксимации r_i, $i \in I(\tau - h_0)$.

Если процедура доводки сходится, то по ее результатам информация 1) – 5), использованная для момента τ, обновляется для момента $\tau + h_0$. В противном случае, решая линейные задачи b), c), добиваемся такой точности аппроксимации, при которой станут выполняться условия перехода к процедуре доводки и сходимость последней.

Управление $u^0(t|\tau, x^*(\tau))$, $t \in [\tau, \tau + 2h_0]$, подается на вход объекта управления, начиная с момента $\tau + s^*(\tau)$, где $s^*(\tau)$ — время, потраченное на осуществление операций a)–c). Как показано в [2, 4], описанные операции по реализации оптимальной обратной связи могут быть с помощью существующих микропроцессоров осуществлены очень быстро. Поэтому предложенные методы можно применять для оптимального управления динамическими системами достаточно высокого порядка. При этом задержки $s^*(\tau)$, $\tau \in T_{h_0}$, которые вызваны выполнением указанных выше операций, не оказывают существенного влияния на качество переходных процессов [5].

Если при решении линейных задач b), c) в ходе итераций двойственного метода возникла ситуация, когда не существует конечного шага $\sigma > 0$, при котором появляется новый нуль у возмущенного коуправления, то это означает, что в линейных задачах нет допустимых управлений, т. е. текущее состояние $x^*(\tau)$ вышло за пределы множества управляемости.

3. Пример. Предложенный метод проиллюстрируем на следующей задаче ОУ:

$$\alpha^0 = \min(x_3^2(10) + x_4^2(10)),\ \dot{x}_1 = x_3,\ \dot{x}_2 = x_4,\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + 0.5u,\ \dot{x}_4 = 0.1x_1 - 1.02x_2, \quad (13)$$
$$x_1(0) = x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 2,\ x_4(0) = 1,\ x_1^2(10) + x_2^2(10) \le 2,\ |u(t)| \le 1,\ t \in [0, 10].$$

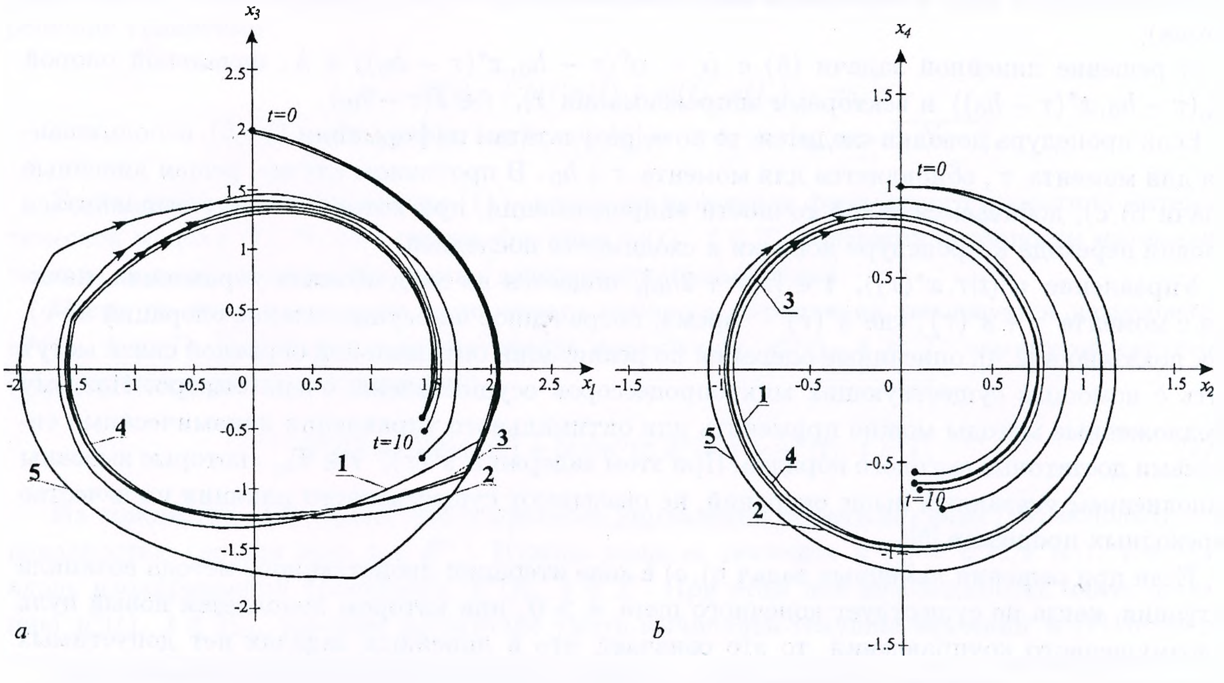
Следуя первой процедуре, получили решение кусочно-линейной аппроксимации задачи (13) в классе дискретных управлений: начальное значение программы $u(t) = -1$, $t \in [0, 2.36[\cup[6.2, 9.52[$; $u(t) = 1$, $t \in [2.36, 6.2[\cup[9.56, 10]$; $u(t) = 0.088161$, $t \in [9.52, 9.56[$; терминальное состояние $x(10) = (1.41309, 0.056357, -0.438719, -0.598789)$; $\tilde{\alpha}^0 = 0.546491$; точность аппроксимации $\bar{\varepsilon} = 0.005622$; значение критерия качества задачи (13) $\varphi(x(10)) = 0.551022$; $\varphi^*(x(10)) = -10^{-7}$.

Взяв в качестве начального приближения точки $t_1 = 2.36, t_2 = 6.2, t_3 = 9.52$ и число $\nu = 0.942578$, выполнили процедуру доводки. Норма невязки изменялась на итерациях следующим образом: 0.703364, 0.012322, 0.000148, 0.000018, 10^{-8}. Результаты решения задачи (13): начальное значение оптимальной пограммы $u^0(0) = -1$; ее точки переключения $t_1^0 = 2.420398, t_2^0 = 6.177214, t_3^0 = 9.520199$; терминальное состояние $x^0(10) = (1.413023, 0.058022, -0.415323, -0.613213)$; $\nu = 0.575278$; значение критерия качества задачи (13) $\alpha^0 = \varphi(x^0(10)) = 0.548523$; $\varphi^*(x^0(10)) = 10^{-13}$.

Перейдем к построению позиционного решения задачи (13). Пусть на рассматриваемую систему действует неизвестное оптимальному регулятору кусочно-непрерывное возмущение, т. е. поведение реальной системы управления описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_3,\ \dot{x}_2 = x_4,\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + 0.5u,\ \dot{x}_4 = 0.1x_1 - 1.02x_2 + w,$$
$$w(t) = w^*(t) = 0.1 \sin 2t,\ t \in [0, 7];\ w(t) = w^*(t) \equiv 0,\ t \in]7, 10].$$

Получились следующие результаты: начальное значение реализации оптимальной обратной связи $u^*(0) = -1$; ее точки переключения: $t_1 = 3.157418$, $t_2 = 6.135885$, $t_3 = 9.62848$; терминальное состояние: $x^*(10) = (1.398611, 0.209492, -0.758997, -0.754491)$; значение критерия качества: $\varphi(x^*(10)) = 1.145334$; $\varphi^*(x^*(10)) = -10^{-9}$. Количество итераций процедуры доводки в процессе решения не превышало шести.



Проекции траекторий системы (13) на фазовые плоскости x_1x_3 (a), x_2x_4 (b)

На рисунке изображены проекции на фазовые плоскости x_1x_3, x_2x_4 траекторий системы (13), порожденных 1) программным решением $u^0_\alpha(t)$, $t \in T$, кусочно-линейной аппроксимационной задачи при $\tilde{\alpha}^0 = 0.298723$, $\tilde{\alpha}^0 = 0.521676$, $\tilde{\alpha}^0 = 0.546491$ — кривые *1–3* соответсвенно; 2) оптимальной программой $u^0(t)$, $t \in T$, (возмущение отсутствует) — кривая *4*, 3) реализацией оптимальной обратной связи $u^*(t)$, $t \in T$, и возмущением $w^*(t)$, $t \in T$, — кривая *5*.

Литература

1. Хомицкая Т. Г. // Вестн. БГТУ. Сер. физ., мат., инф. 2003. № 5. С. 59–64.

2. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. // ЖВМ и МФ. 2000. Т. 40, № 6. С. 838–859.

3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, 1974.

4. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костюкова О. И., Ракецкий В. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 4. Выпуклые задачи. Минск, 1987.

5. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. // ЖВМ и МФ. 2001. Т. 41, № 10. С. 1485–1504.

T. G. KHOMITSKAYA

OPEN-LOOP AND CLOSED-LOOP SOLUTIONS OF LINEAR-CONVEX OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH TERMINAL RESTRICTION

Summary

An optimal control problem for a linear nonstationary system is under consideration. The behavior of this system is estimated by the values of convex objective function on its terminal state that belong to the bounded convex set. The method of construction of optimal open-loop solution is proposed. It consists from the linearization of the considered problem and special finishing procedure. On the base of this method the algorithm of optimal controller work is realized. It allows to synthesis an optimal feedback control. Results are illustrated on the example of fourth-order dynamical system.