(2) *Разрешимая группа G квази-k-примарна тогда и только тогда, когда* $G \in X(\pi(G))$ и $|\pi(G)| = k+1$.

В π-разрешимой группе индексы максимальных подгрупп являются степенями простых чисел из π или π'-числами. Поэтому в группах из класса $X(\pi)$ все максимальные подгруппы, индекс которых есть π-число, являются холловыми. Такие группы описаны В.С. Монаховым [2].

Теорема. *Если в π-разрешимой группе G каждая широкая максимальная подгруппа, индекс которой есть π-число, π-специальна, то* $G / Z_{\infty}(G) \in X(\pi)$.

Здесь $Z_{\infty}(G) = \bigcap_{i=1}^{\infty} Z_i(G)$, *где* $Z_1(G) = Z(G)$, $Z_2(G)/Z_1(G) = Z(G/Z_1(G))$, …, $Z_i(G)/Z_{i-1}(G) = Z(G/Z_{i-1}(G))$, …

Группа H π-специальна, если $H = H_{\pi} \times H_{\pi'}$ и H_{π} нильпотентна.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.

2. Монахов, В. С. Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2008. – Т. 84, № 3. – С. 390–394.

УДК 519.1

И.В. ТУЗИК, Т.Г. ХОМИЦКАЯ
Брест, БрГТУ

ПОЛУЧЕНИЕ ПОЛИНОМА ЖЕГАЛКИНА ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ DERIVE

Рассмотрим вопрос о получении полиномиального представления булевой функции с помощью математического пакета Derive. Получение полинома Жегалкина вручную для булевой функции четырех и более переменных является трудоемкой задачей, при решении которой студенты часто допускают ошибки.

В данной статье предлагается подход, который позволяет находить полином Жегалкина для произвольных логических функций, заданных своими значениями.

В предлагаемой реализации используется метод неопределенных коэффициентов, но при этом не возникает необходимости решать соответствующую систему уравнений для отыскания этих коэффициентов. Кроме того, пользователь имеет возможность влиять на скорость вычислений, выполняемых математическим пакетом.

Изложим данный подход на примере всюду определенной функции четырех переменных $g(x,y,z,t)$.

Сначала требуется построить общий вид полинома для функции n переменных. Для этого используется комбинаторный подход, позволяющий получить все возможные слагаемые полинома. Каждая из переменных может вообще не входить в слагаемое полинома либо присутствовать в нем ровно 1 раз.

Для функции, зависящей от четырех переменных x, y, z, t, имеем следующее:

$$\#1: (1 + x)\cdot(1 + y)\cdot(1 + z)\cdot(1 + t).$$

Раскрываем скобки в этом выражении и получаем все возможные слагаемые общего вида полинома:

$$\#2: t\cdot x\cdot y\cdot z+t\cdot x\cdot y+t\cdot x\cdot z+t\cdot x+t\cdot y\cdot z+t\cdot y+t\cdot z+t+x\cdot y\cdot z+x\cdot y+x\cdot z+x+y\cdot z+y+z+1.$$

Умножаем каждое слагаемое на неопределенный коэффициент c_i (для функции 4-х переменных $i = 1, \ldots, 16$), используя скалярное произведение:

$$\#3: \mathrm{VECTOR}(c_i, i, 1, 16)\cdot\mathrm{TERMS}(\#2, \mathrm{Trivial}).$$

Получаем общий вид полинома для функции 4-х переменных с неопределенными коэффициентами:

$$\#4: c_{16} + z\cdot c_{15} + y\cdot c_{14} + y\cdot z\cdot c_{13} + x\cdot c_{12} + x\cdot z\cdot c_{11} + x\cdot y\cdot c_{10} + x\cdot y\cdot z\cdot c_9 + t\cdot c_8 + t\cdot z\cdot c_7 + t\cdot y\cdot c_6 + t\cdot y\cdot z\cdot c_5 + t\cdot x\cdot c_4 + t\cdot x\cdot z\cdot c_3 + t\cdot x\cdot y\cdot c_2 + t\cdot x\cdot y\cdot z\cdot c_1.$$

В найденном полиноме используется обычная операция сложения, а в полиноме Жегалкина требуется операция сложения по модулю 2, поэтому окончательно полином Жегалкина функции $g(x,y,z,t)$ примет вид:

$$\#5: g(x, y, z, t) := \mathrm{MOD}(c_{16} + z\cdot c_{15} + y\cdot c_{14} + y\cdot z\cdot c_{13} + x\cdot c_{12} + x\cdot z\cdot c_{11} + x\cdot y\cdot c_{10} + x\cdot y\cdot z\cdot c_9 + t\cdot c_8 + t\cdot z\cdot c_7 + t\cdot y\cdot c_6 + t\cdot y\cdot z\cdot c_5 + t\cdot x\cdot c_4 + t\cdot x\cdot z\cdot c_3 + t\cdot x\cdot y\cdot c_2 + t\cdot x\cdot y\cdot z\cdot c_1, 2).$$

Далее найдем все возможные наборы значений аргументов, на которых определена функция четырех переменных, и запишем их в виде матрицы в переменную a:

$$\#6: \{0, 1\}^4$$

$$\#7: \{[0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 1, 1], [0, 1, 0, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 1, 1, 0], [0, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 1, 0], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 0, 0], [1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1]\}$$

$$a:=[[0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 1, 1], [0, 1, 0, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 1, 1, 0], [0, 1, 1, 1], [1, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 1, 0], [1, 0, 1, 1], [1, 1, 0, 0], [1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1]].$$

Зададим вектор v, содержащий значения функции $g(x,y,z,t)$, например:

$$\#9: v := [0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0].$$

Составим систему уравнений, позволяющую найти значения неопределенных коэффициентов c_i ($i = 1, \ldots, 16$):

$$\#10: \mathrm{VECTOR}(g(a_{i,1}, a_{i,2}, a_{i,3}, a_{i,4}) = v_i, i, 1, 16).$$

Получим уравнения:

$$\#11: [\mathrm{MOD}(c_{16}, 2) = 0, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_8, 2) = 1, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{15}, 2) = 1, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{15} + c_8 + c_7, 2) = 1, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{14}, 2) = 0, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{14} + c_8 + c_6, 2) = 0, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{15} + c_{14} + c_{13}, 2) = 1, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{15} + c_{14} + c_{13} + c_8 + c_7 + c_6 + c_5, 2) = 0, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{12}, 2) = 1, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{12} + c_8 + c_4, 2) = 0, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{15} + c_{12} + c_{11}, 2) = 0, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{15} + c_{12} + c_{11} + c_8 + c_7 + c_4 + c_3, 2) = 0, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{14} + c_{12} + c_{10}, 2) = 1, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{14} + c_{12} + c_{10} + c_8 + c_6 + c_4 + c_2, 2) = 1, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{15} + c_{14} + c_{13} + c_{12} + c_{11} + c_{10} + c_9, 2) = 1, \mathrm{MOD}(c_{16} + c_{15} + c_{14} + c_{13} + c_{12} + c_{11} + c_{10} + c_9 + c_8 + c_7 + c_6 + c_5 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1, 2) = 0].$$

Решение такой системы уравнений средствами Derive (с помощью функции *SOLVE()*) не принесет желаемый результат, т.к. $c_i \in \{0,1\}$, а Derive при вычислении суммы по модулю 2 эти требования не учитывает.

Поэтому для отыскания коэффициентов, удовлетворяющих всем найденным в выражении #11 условиям, воспользуемся функцией *SELECT(p(m), m, u)*, где *p(m)* – условие, записанное в виде предиката, которому должны удовлетворять объекты *m*, отбираемые из множества *u*.

В нашем случае отбор должен вестись из всех возможных векторов длины 16, состоящих из нулей и единиц. Составное условие, которому должны удовлетворять эти векторы, получается из найденных уравнений (#11), соединенных знаками конъюнкции.

Запишем функцию *SELECT()* для нашего случая и найдем с ее помощью вектор, каждая компонента которого есть один из неопределенных коэффициентов c_i. Здесь для краткости записи составное условие обозначено как *p(c)*:

$$\#12: \mathrm{SELECT}(p(c), c, \{0, 1\}^{16}),$$

$$\#13: \{[0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0]\}.$$

Подставив найденные значения в выражение #4 и раскрыв скобки, получим полином Жегалкина для нашей функции:

$$\#14: c := [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0],$$

$$\#15: x\cdot(y\cdot z + 1) + t\cdot y + z\cdot(t + 1) + t,$$

$$\#16: t\cdot y + t\cdot z + t + x\cdot y\cdot z + x + z,$$

$$\#17: g(x, y, z, t) := \mathrm{MOD}(t\cdot y + t\cdot z + t + x\cdot y\cdot z + x + z, 2).$$

При вычислении значения выражения #12 наибольшее количество времени затрачивается системой для отыскания множества $\{0, 1\}^{16}$. Время вычислений можно значительно сократить, если из уравнений #11 устно определить одно-два неизвестных c_i.

Например, из первого уравнения очевидно, что $c_{16} = 0$. В этом случае множество, из которого требуется вести отбор, можно уменьшить в два раза:

вместо $\{0, 1\}^{16}$ использовать множество, заданное как прямое произведение $\{0,1\}^{15}\times\{0\}$, состоящее из всех двоичных векторов размерности 16, у которых последняя, 16-я, компонента равна 0. Тогда наша функция примет вид:

$$\mathrm{SELECT}(p(c),c,\{0,1\}^{15}\cdot\{0\}).$$

Если, кроме того, учесть еще и 3-е уравнение из#11, откуда следует, что $c_{15} = 1$, получим:

$$\mathrm{SELECT}(p(c),c,\{0,1\}^{14}\cdot\{1\}\cdot\{0\}).$$

Здесь в качестве множества для отбора используется множество двоичных векторов, у которых 15-я и 16-я компоненты равны 1 и 0 соответственно.

Ниже приводится таблица, показывающая сравнительный анализ скорости вычислений, зависящий от множества, из которого ведется отбор нужных значений.

Таблица – Сравнительный анализ скорости вычислений

Вид функции	Компьютер 1, с.	Компьютер 2, с.
$\mathrm{SELECT}(p(c), c, \{0, 1\}^{16})$	163	225,9
$\mathrm{SELECT}(p(c), c, \{0,1\}^{15}\cdot\{0\})$	95,5	146
$\mathrm{SELECT}(p(c), c, \{0,1\}^{14}\cdot\{1\}\cdot\{0\})$	34,1	60,5

Как видим, с помощью описанного приема время вычислений может быть уменьшено в несколько раз. Вычислительные эксперименты, проведенные на компьютерах разной конфигурации, показывают схожие результаты.

УДК 51:004.02

А.В. ЧИЧУРИН[1], Е.Н. ШВЫЧКИНА[2]
[1]Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина
[2]Брест, БрГТУ

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ БАКТЕРИАЛЬНЫХ ПЛАЗМИД

В работах [1–3] рассмотрено математическое моделирование динамики развития двух видов микроорганизмов, которые потребляют один субстрат. Такая математическая модель называется *хемостатом*. Для описания лимитированного роста популяции в хемостате применяют следующую систему уравнений Михаэлиса-Ментен [1; 2]: