ся материалам, характеризующим региональную активность смыва и эрозии. Модуль смыва с пахотных земель в Вологодской области составляет до 10 т/га в год, с ним тесно связана миграция биогенных элементов, способствующих эвтрофикации водоемов – азота и фосфора. Оценка воздействия сельских населенных пунктов может производиться по численности населения, проживающего на водосборе, и по существующим нормативам загрязнений, поступающих в водные объекты. В частности, суточные нормы поступления загрязняющих веществ от каждого сельского жителя составляют по азоту 4,8 г, по фосфору 0,7 г, сульфатам 5,2 г, хлоридам 4,4 г, взвешенным веществам 13 г. Аналогичные нормы имеются для сельскохозяйственных животных, линейных объектов транспорта и связи.

Выводы. На начальных этапах оценки состояния экосистемы речного водосбора сопоставляются естественные потоки веществ с потоками, создаваемые антропогенной деятельностью. Использованная методика позволяет оценить и сопоставить естественные и антропогенные потоки веществ для любого створа в речной системе. Самое общее представление об антропогенной нагрузке на экосистему речного водосбора дает сравнение порядка реки в створе с численностью населения, проживающего выше этого створа. Отношение численности населения к порядку (площади) водосбора аналогично показателю «плотность населения», но в отличие от него характеризует антропогенную нагрузку именно на водный объект – наиболее чувствительную часть экосистемы.

УДК 551.492

А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов,
Е.В. Кузьмина (г. Брест, Беларусь)

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ПАРАМЕТРОВ ОДНОЙ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГИДРОЛОГИИ

Рассмотрим марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть $\overline{V}$ – среднегодовой расход воды, а V_t – расход воды в момент времени t. Тогда, полагая $X_t = (V_t - \overline{V}) / \overline{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma\, dW_t, \tag{1}$$

где W_t – стандартный винеровский процесс (так что $\frac{dW_t}{dt} = W_t'$ – обобщенный случайный процесс белого шума с параметром $\sigma = C_V\sqrt{2k}$), C_V – коэффициент вариации, k^{-1} – время релаксации речного стока.

Орнштейна – Уленбека процесс является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с коэффициентом сноса $a(t, x) = -kx$ и диффузии $\sigma(t,x) = \sigma^2$, переходная плотность вероятности $p(t, x, y)$ которого является фундаментальным решением соответствующего уравнения Фоккера – Планка (т.е. прямого уравнения Колмогорова) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial y}(yp) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

где коэффициент k определяется по формуле $k = -\ln r$, так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид $e^{-k\tau}$, а r – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ сток равен x, а x_* – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение V будет находиться в полуинтервале $[x_*, \infty)$ при условии, что $x \in [x_*, +\infty)$. Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ, однородны по времени, обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x,y) = -kx\frac{\partial}{\partial x}p(t,x,y) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Пусть T – момент времени, в который значение V покинет промежуток $[x_*, +\infty)$. Тогда $prob(T \geq t) = G(t,x), G(t,x) = \int\limits_{x_*}^{+\infty} p(t,x,y)dy$.

Так как функция $1 - G(t, x)$ является распределением случайной величины T, то моменты n-ого порядка времени достижения границы x_* определяются соотношениями $T_k = -\int\limits_0^{+\infty} t^k \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt = \int\limits_0^{+\infty} kt^{k-1}G(t,x)dt$.

Интегрируя по t на интервале от 0 до $+\infty$ соотношение (2), получаем следующие уравнения для T_n:

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_n}{dx^2} - kx\frac{dT_n}{dx} = -nT_{n-1}, \text{ при } \frac{dT_n}{dx}(+\infty) = 0,\ T_n(x)\Big|_{x=x_*} = 0\ (T_0 = 1).$$

Введя безразмерные величины

$$kT_1 = \theta_1,\ k^2T_2 = \theta_2,\ x\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x}{C_V} = \xi,\ x_*\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x_*}{C_V} = \xi_*,$$

приходим к системе для оценки математического ожидания T_1 и среднего квадратичного отклонения $\sqrt{T_2 - T_1^2}$:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_2}{d\xi} = -2\theta_1, \frac{d\theta_i}{d\xi}(+\infty) = 0, \theta_i(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0. \quad (3)$$

Система (3), приведенная в [1], при решении различных прикладных задач интегрировалась численными методами. В данной работе рассматриваются вопросы сходимости решения системы (1), записанного в виде степенных рядов [3]: $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$, $\theta_2(\xi) = 2\left(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\right)$, где

$$S_1(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}, \quad (4)$$

$$S_2(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\left(\ln\left(2 - 2\left\{\frac{k-1}{2}\right\}\right) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{1}{m - \left\{\frac{k}{2}\right\}}\right)\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}, \quad (5)$$

а $[t]$ и $\{t\}$ целая и дробная часть числа t соответственно.

Степенной ряд (4) получен в [2]. В [2] предложено теоретическое обоснование асимптотического поведения математического ожидания, рассматриваемого распределения вероятностей многолетних колебаний речного стока, широко используемого в практике гидрологических расчетов. Предлагаемая в [3] методика решения уравнений вида (3) обобщена на более широкий класс уравнений такого типа, для чего исследовались функции специального вида, связанные соотношениями с интегралами Эйлера первого и второго рода и неполной гамма-функцией. Сходимость ряда (4) рассматривалась в [3].

Исследуем решение $\theta_2(\xi) = 2\left(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\right)$, где

$$S_2(\xi) = A_2(\xi) - B_2(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\ln 2 - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$$ на сходимость.

Общие члены этих рядов $a_n^{(2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\ln 2 - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ и $b_n^{(2)} = \left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ удовлетворяют соотношениям $a_{n+1}^{(2)} = \frac{c_{n+1}(2n+1)\xi^2}{c_n(2n+2)(2n+3)}a_n^{(2)}$, $c_{n+1} = c_n - \frac{1}{2n+1}$, $a_0^{(2)} = c_0\xi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $c_0 = \ln 2$ и $b_{n+1}^{(2)} = \frac{d_{n+1}(2n+2)\xi^2}{d_n(2n+3)(2n+4)}b_n^{(2)}$, $d_{n+1} = d_n + \frac{1}{2n+2}$, $b_1^{(2)} = d_1\frac{\xi^4}{12}$, $d_1 = \frac{1}{2}$.

Заметим, что $\left|\frac{c_{n+1}(2n+1)}{c_n(2n+2)}\right| < 1$, если $n \ge 5$ и $\frac{d_{n+1}(2n+2)}{d_n(2n+3)} < 1$, если $n \ge 4$.

Используя признак Д'Аламбера, имеем

$$\left|\frac{a_{n+1}^{(2)}}{a_n^{(2)}}\right| = \frac{|c_{n+1}|\xi^2(2n+1)}{|c_n|(2n+2)(2n+3)} < \frac{\xi^2}{2n+3} < q < 1, \text{ если } n \ge \max\left(\frac{\xi^2}{2q} - 1{,}5; 5\right)$$

и

$$\frac{b_{n+1}^{(2)}}{b_n^{(2)}} = \frac{d_{n+1}(2n+2)\xi^2}{d_n(2n+3)(2n+4)} < \frac{\xi^2}{2n+4} < q < 1, \text{ если } n > \max\left(\frac{\xi^2}{2q} - 2; 4\right).$$

Следовательно, существует такое число q, $0 < q < 1$, что, начиная с некоторого номера остатки рядов $A_2(\xi), B_2(\xi)$ удовлетворяют неравенствам: $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^{(2)}\right| \le \frac{\left|a_n^{(2)}\right|}{1-q}$, $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k^{(2)} \le \frac{b_n^{(2)}}{1-q}$ и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q.

Таким образом, значения рядов $A_2(\xi), B_2(\xi)$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$, можно получить, вычисляя n-е частичные суммы этих рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)}$, $\sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(2)}$, если выполняются неравенства:

$$\left|a_n^{(2)}\right| \le \varepsilon(1-q)\,,\ b_n^{(2)} \le \varepsilon(1-q)\,,\ \text{и}\ n \ge n_0 = \max\left(\left[\frac{\xi^2}{2q}\right];5\right). \quad (6)$$

Следовательно, точность 2ε вычисления значений $S_2(\xi), S_2(\xi_*)$ обеспечивается вычислением n-х частичных сумм рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)}(\xi)$, $\sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(2)}(\xi)$ при выполнении условий (6), что гарантирует точность 4ε вычисления значения $S_2(\xi) - S_2(\xi_*)$.

Рассмотрим пример, приведенный в [1]. Пусть среднегодовой сток Волги $\bar{V} = 239$ км³/год (объем выборки n = 113), среднеквадратичное отклонение равно 46 км³/год. Тогда $C_v = 0{,}19$. Если коэффициент корреляции r между смежными значениями стока равен 0,42, тогда $k = -\ln 0{,}42 \cong 0{,}9$ год$^{-1}$, $\sigma = 0{,}257$ год$^{-0.5}$, $\sigma^2 = 0{,}066$ год$^{-1}$. Предположим, что в начальный момент времени V = км³/год. Через сколько лет сток достигнет 101 км³/год, т.е. уменьшится на шесть среднеквадратичных отклонений (276 км³/год)? В данном случае $\xi_* = -3$ (это отклонение от среднегодового значения стока, взятое в долях C_v), а времени перехода стока от одного состояния к другому соответствует $\xi = 3$.

ξ_*	ξ					
	-2	-1	0	1	2	3
-3	76,50 (85,55)	84,84 (86,13)	86,93 (86,16)	87,83 (86,17)	88,36 (86,17)	**88,71 (86,17)**
-2		8,34 (9,97)	10,43 (10,26)	11,33 (10,30)	11,85 (10,31)	12,21 (10,32)
-1			2,09 (2,42)	3,00 (2,59)	3,51 (2,63)	3,87 (2,64)
0				0,90 (0,92)	1,43 (1,03)	1,78 (1,07)

В соответствии с таблицей, полученной с использованием решения системы (4), (5) и условий (6) $\theta_1 = 88{,}71$, а размерное время составляет $m_T = \frac{\theta_1}{k} = 88{,}71:0{,}9 \approx 98{,}6$ лет, $\sigma_T = \frac{\sqrt{\theta_2 - \theta_1^2}}{k} = 86{,}17:0{,}9 \approx 95{,}74$.

По известным значениям C_v и r можно исследовать большой цикл задач стохастической гидрологии. Результаты исследований можно применить при расчете и прогнозе многолетних колебаний речного стока рек Беларуси.

Литература:

1. **Найденов, В.И.** Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – Том 29. – № 1. – М., 2002. – С. 62-67.
2. **Волчек, А.А.** Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь: сборник материалов Международной научно-технической конференции, Брест, 26-28 апреля 2010 г. – Брест: БрГТУ, 2010. – С. 45-49.

3. **Волчек, А.А.** О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Веснік Брэсцкага універсітэта. – Брест, 2010. – № 1: Физика, математика. – С. 68-77.

УДК 577.486.627 (476)

А.И. Зарубов, Н.А. Асмаловский *(г. Минск, Беларусь)*

ОЦЕНКА ЭКОЛОГИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ВОДНЫХ ОБЪЕКТОВ КЛИМОВИЧСКОГО РАЙОНА ПО СТРУКТУРЕ ЗООПЛАНКТОНА

Введение. Малые реки составляют подавляющее большинство водотоков Могилевской области. Из-за небольших глубин и малой ширины русла, их самоочистительные способности ограничены, поэтому их экосистемы не всегда способны противостоять значительному поступлению поллютантов и резким колебаниям температуры. Эти факторы вызывают флуктуации общей численности водного населения и изменения в их структуре. Основными причинами структурных перестроек зоопланктонных сообществ за последние десятилетия является, с одной стороны, антропогенное воздействие на природную среду района, а с другой, – создание благоприятной обстановки для развития водных беспозвоночных в связи со снижением численности населения. Цель работы – оценить экологическое состояние водных объектов Климовичского района на основе структурных показателей зоопланктона. Исследование водных беспозвоночных животных было проведено в летний период 2011 г. в рр. Сож, Остер, Лобжанка и Сосновка, в пруде Голубой карьер. Все эти объекты различаются по происхождению, проточности, морфометрическим показателям и степени зарастаемости, которые играют определяющую роль в формировании сообществ водных беспозвоночных. Морфометрические характеристики обследованных рек района представлены в таблице 1.

Таблица 1

Морфометрические характеристики рек района [1]

Водотоки	Длина (км)		Средняя ширина, м	Площадь водосбора, км^2
	общая	в районе		
р. Сож	648	12	40	42100
р. Остер	274	27	30	3370
р. Лобжанка	54	54	3-5	489
р. Сосновка	39	39	4-5	201