4. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы / М. Шредер – Ижевск: РХД, 2001. – 528 с.

УЛУЧШЕНИЕ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ.

А.Ю. Хоронжевская
(БрГТУ, Брест)

Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, радиус сходимости которого равен единице. Представим сумму этого ряда в виде $a_0 + x\varphi(x)$. Выражая $\varphi(x)$ и умножая обе части полученного равенства на $1-x$, получим: $(1-x)\varphi(x) = a_0 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n$, где $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ – конечные разности первого порядка коэффициентов a_n. Сумма исходного ряда примет вид: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n$. Данное преобразование степенного ряда называется преобразованием Эйлера–Абеля. Применив это преобразование к степенному ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \Delta a_n x^n$, придем к равенству $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x\Delta a_0}{(1-x)^2} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n$, где $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$ – конечные разности второго порядка коэффициентов a_n. Применяя последовательно p раз преобразование Эйлера–Абеля, в итоге получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^k a_0 \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p a_n x^n, \qquad (1)$$

где $\Delta^p a_n = \Delta(\Delta^{p-1} a_n)$ – конечные разности p-го порядка коэффициентов a_n. Формулу (1) целесообразно применять для нахождения приближенного значения суммы ряда в случае, когда конечные разности $\Delta^p a_n$

при $n \to \infty$ имеют более высокий порядок убывания, чем коэффициенты a_n.

Полагая в равенстве (1) $a_n = Q_{p-1}(n)$, где $Q_{p-1}(n)$ – многочлен степени $p-1$, и учитывая, что $\Delta^p Q_{p-1}(n) = 0$, получим формулу для нахождения суммы ряда в конечном виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{p-1}(n)x^n = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^k Q_{p-1}(0)\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \quad \left(|x|<1\right). \tag{2}$$

Алгоритм нахождения суммы ряда вида (2) реализован в виде макроса в среде VBA.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966.

СИММЕТРИЧНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАЗИОБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Д.С. Шпак
(ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно)

В работе вводятся понятия левого и правого квазиобратных операторов степени r, а также квазиобратного оператора степени r.

Обобщенное преобразование Лапласа $\widetilde{b}_n$ импульсной характеристики b_n порядка n называется спектральной характеристикой порядка n эволюционного оператора B.

Для определения прямой формулы нахождения спектральных характеристик квазиобратного оператора B выделяются некоторые общие свойства данных спектральных характеристик. При рассмотрении формул спектральных характеристик $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \ldots, \widetilde{b}_5$, было доказано, что:

1. В каждой из спектральных характеристик $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \ldots, \widetilde{b}_5$ присутствует общий член. Например, для $\widetilde{b}_4$:

$$(\widetilde{a}_1(\lambda_1)\widetilde{a}_1(\lambda_2)\widetilde{a}_1(\lambda_3)\widetilde{a}_1(\lambda_4)\widetilde{a}_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4))^{-1}.$$

Следовательно, для n-ой спектральной характеристики $\widetilde{b}_n$ получим общий член вида: $(\widetilde{a}_1(\lambda_1)\widetilde{a}_1(\lambda_2)\cdot\ldots\cdot\widetilde{a}_1(\lambda_n)\widetilde{a}_1(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n))^{-1}$.