3. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

4. Басик, А. И. Вычисление индекса краевой задачи Римана – Гильберта для эллиптических кососимметрических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, О. А. Гацкевич, Е. В. Грицук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2016. – № 1. – С. 46–52.

5. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация четырехмерных аналогов системы Коши – Римана с действительными коэффициентами / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 5–9.

УДК 517.946

А. И. БАСИК, А. В. ПРИВЕДЕНЕЦ
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ – ограниченная односвязная область, границей которой является гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу отыскания решения $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)) \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta u_1 - 4\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + 2\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \Delta u_2 + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0, \qquad (x \in \Omega), \\ \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \Delta u_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

удовлетворяющего на границе $\partial\Omega$ области Ω краевым условиям

$$u_1\big|_{\partial\Omega} = f_1(y),\ u_2\big|_{\partial\Omega} = f_2(y),\ u_3\big|_{\partial\Omega} = f_3(y)\ (y \in \partial\Omega). \tag{2}$$

Здесь $f_1, f_2, f_3 : \partial\Omega \to \mathrm{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции, Δ – оператор Лапласа в R^3. Задачу (1), (2) назовем задачей Дирихле для системы (1).

Теорема. *Задача Дирихле* (1), (2) *регуляризуема. Индекс задачи* (1), (2) *равен нулю.*

◀ Рассмотрим семейство задач

$$\begin{cases} \Delta u_1 - 4t\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + 2t\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0, \\ t\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \Delta u_2 + t\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0, \\ t\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + 2t\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \Delta u_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

с граничными условиями (2), $t \in [0,1]$. Покажем, что при каждом $t \in [0,1]$ задача Дирихле (2), (3) является регуляризуемой. Напомним, что краевая задача (2), (3) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я. Б. Лопатинского. Это условие представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и состоит в том, что ранг матрицы

$$L(y,\tau) = \int_{\Gamma} B(\lambda\nu + \tau)C^{-1}(\lambda\nu + \tau)(E, \lambda E)d\lambda \tag{4}$$

является максимальным в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом ненулевом касательном к $\partial\Omega$ в точке y вектора $\tau \in \tau(y)$. Здесь $C(\xi)$ – характеристическая матрица системы (3); E– единичная матрица третьего порядка; $B = E$ – символическая матрица граничного оператора (2); ν – вектор единичной внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке $y \in \partial\Omega$; Γ – простой замкнутый контур, лежащий в верхней λ-полуплоскости и охватывающий находящиеся там λ-корни уравнения $\det C(\lambda\nu + \tau) = 0$.

Непосредственные вычисления показывают, что минор, образованный первыми тремя столбцами матрицы Лопатинского задачи (2), (3) равен $\frac{i}{8} \neq 0$. Таким образом, задача (2), (3) регуляризуема при каждом $t \in [0,1]$. Следовательно, однородная задача (2), (3) имеет α линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи требуется выполнение конечного числа β линейно независимых условий разрешимости. Число $\alpha - \beta$ называется индексом задачи (2), (3). Известно, что индекс является гомотопически устойчивым [2], т. е. не зависит от t. Следовательно, индекс задачи (1), (2) равен индексу задачи Дирихле для тройки уравнений Лапласа

$$\Delta u_1 = 0,\ \Delta u_2 = 0,\ \Delta u_3 = 0, (x \in \partial\Omega). \tag{5}$$

Общеизвестно [3, с. 303, 332], что задача Дирихле $\Delta u = 0$, $u|_{\partial\Omega} = f$ при любой непрерывной по Гельдеру функции $f : \partial\Omega \to R$ имеет единственное решение. Следовательно, индекс (5), (1) равен нулю. Теорема доказана. ▶

Список использованной литературы

1. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

2. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебник / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУ, 2003. – 430 с.

3. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1967. – 436 с.

УДК 517.946

А. И. БАСИК, И. Ю. ЯЩУК
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО ТРЕХМЕРНОГО АНАЛОГА СИСТЕМЫ КОШИ – РИМАНА

Пусть $\Omega^+ \subset \mathbf{R}^3$ – ограниченная область, гомеоморфная шару, границей которой является поверхность Ляпунова, гомеоморфная сфере. Через Ω^- обозначим дополнение замыкания Ω^+.

Четырехкомпонентную вектор-функцию $U = (u_1(x), \dots, u_4(x))^T$, удовлетворяющую в областях Ω^+ и Ω^- системе дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка вида

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

и обращающуюся в нуль на бесконечности, назовем кусочно-голоморфным вектором. Отметим, что система (1) является трехмерным аналогом системы Коши – Римана [1]. Последнее означает, что каждая компонента ее непрерывно дифференцируемого решения удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. $\Delta u_k = 0$ ($k = 1, \dots, 4$).