4. Матвеев, В. И. Ионизационные потери релятивистских многозарядных ионов / В. И. Матвеев, С. Г. Толманов // ЖЭТФ. – 1995. – Т. 107, вып. 6. – С. 1780–1791.

5. Матвеев, В. И. Потери энергии релятивистских многозарядных ионов в электронной плазме / В. И. Матвеев, С. Г. Толманов // ЖТФ. – 1998. – Т. 68, № 2. – С. 9–12.

УДК 517.946

А. И. БАСИК, Е. В. ГРИЦУК, Т. А. ГРИЦУК
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $\mathbf{R}^3$

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ – ограниченная односвязная область, границей которой является гладкая двумерная поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. Задачу нахождения непрерывно-дифференцируемой вектор-функции $U:\Omega \to \mathbf{R}^4$, непрерывной по Гельдеру в замыкании области Ω, удовлетворяющей в Ω эллиптической системе дифференциальных уравнений

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям

$$B(y)U(y) = f(y) \quad (y \in \partial\Omega), \tag{2}$$

называют задачей Римана – Гильберта. Здесь $A_j, j = 1,2,3$ – постоянные действительные матрицы четвертого порядка, B – заданная на поверхности $\partial\Omega$ непрерывная по Гельдеру матрица размера 2×4, f – заданная непрерывная по Гельдеру на $\partial\Omega$ двухкомпонентная вектор-функция.

В. И. Шевченко в статье [1] получил условие регуляризуемости задачи Римана – Гильберта для системы Моисила – Теодореску и вычислил индекс этой задачи (краевая задача называется регуляризуемой, если для нее выполняется условие Я. Б. Лопатинского [2]). Позднее вопросы регуляризуемости и индекса задачи (1), (2) были решены для классов трехмерных аналогов системы Коши – Римана [3] и эллиптических кососимметрических систем в $\mathbf{R}^3$ [4]. Для сравнения отметим, что для четырехмерных аналогов системы Коши – Римана регуляризуемых задач (1), (2) не существует [5].

В настоящей работе изучаются вопросы регуляризуемости и индекса краевой задачи Римана – Гильберта для класса эллиптических систем (1), характеристическая матрица которых имеет вид

$$A(\xi) := A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 = \begin{pmatrix} \langle a;\xi\rangle & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ -\xi_1 & \langle a;\xi\rangle & -\xi_3 & \xi_2 \\ -\xi_2 & \xi_3 & \langle a;\xi\rangle & -\xi_1 \\ -\xi_3 & -\xi_2 & \xi_1 & \langle a;\xi\rangle \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где $a=(a_1,a_2,a_3)$ – фиксированный вектор, $\langle x;y\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^3$.

Рассмотрим векторное поле

$$P(y) = L(y) + [L(y);a] + a\cdot\langle L(y);a\rangle,$$

где

$$L=(L_1,L_2,L_3),\ L_1=\Lambda_{12}-\Lambda_{34},\ L_2=\Lambda_{13}+\Lambda_{24},\ L_3=\Lambda_{14}-\Lambda_{23},$$

Λ_{jk} – минор матрицы $B(y)$, составленный из ее j-го и k-го столбцов, $[x;y]$ – векторное произведение в $\mathbf{R}^3$.

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *регуляризуема тогда и только тогда, когда в каждой точке* $y\in\partial\Omega$ *выполняется условие*

$$\langle \nu(y);P(y)\rangle \neq 0, \qquad (4)$$

где ν *– единичное поле внутренних нормалей на* $\partial\Omega$. *Индекс регуляризуемой задачи* (1), (2) *равен минус единице.*

◀ Для доказательства теоремы вычисляется матрица Лопатинского задачи (1), (2) и устанавливается равносильность условия максимальности ранга этой матрицы выполнению неравенства (4). Затем гомотопией, не нарушающей условия (4), задача (1), (2) приводится к задаче, для которой индекс вычислен в работе [1]. ▶

Список использованной литературы

1. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация задач Римана–Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Мат. физика : респ. межведомств. сб. – Киев, 1975. – Вып. 17. – С. 184–186.

2. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

3. Усс, А. Т. Краевая задача Римана – Гильберта для трехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 6. – С. 10–15.

4. Басик, А. И. Вычисление индекса краевой задачи Римана – Гильберта для эллиптических кососимметрических систем в $\mathbf{R}^3$ / А. И. Басик, О. А. Гацкевич, Е. В. Грицук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2016. – № 1. – С. 46–52.

5. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация четырехмерных аналогов системы Коши – Римана с действительными коэффициентами / А. Т. Усс // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 5–9.

УДК 517.946

А. И. БАСИК, А. В. ПРИВЕДЕНЕЦ
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ – ограниченная односвязная область, границей которой является гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу отыскания решения $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)) \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ системы уравнений

$$\begin{cases} \Delta u_1 - 4\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + 2\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \Delta u_2 + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0, \qquad (x \in \Omega), \\ \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \Delta u_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

удовлетворяющего на границе $\partial\Omega$ области Ω краевым условиям

$$u_1\big|_{\partial\Omega} = f_1(y),\ u_2\big|_{\partial\Omega} = f_2(y),\ u_3\big|_{\partial\Omega} = f_3(y)\ (y \in \partial\Omega). \tag{2}$$

Здесь $f_1, f_2, f_3 : \partial\Omega \to \mathrm{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции, Δ – оператор Лапласа в R^3. Задачу (1), (2) назовем задачей Дирихле для системы (1).

Теорема. *Задача Дирихле* (1), (2) *регуляризуема. Индекс задачи* (1), (2) *равен нулю.*