УДК 517.925

Г.П. Степанюк[1], А.В. Чичурин[2]
[1]Украина, Луцк, ВНУ имени Леси Украинки,
[2]Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

О ПОСТРОЕНИИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ РЕШЕНИЙ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩИХ ЧЕТЫРЕ ПАРАМЕТРА

Введение. В работе [1] для линейного уравнения четвертого порядка

$$y^{(IV)} + p(x)y''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y = 0 \tag{1}$$

с аналитическими коэффициентами был рассмотрен метод, позволяющий свести это уравнение к системе двух уравнений, одно из которых является уравнением Шварца вида

$$i(x) = \frac{\xi'''}{\xi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2, \tag{2}$$

а второе представляет нелинейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с неизвестной функцией $i(x)$. Последнее уравнение (обозначим его (A)) достаточно громоздко и приведено в работе [1]. Функция $\xi(x)$ связана с функцией $y(x)$ следующим соотношением

$$\xi = \frac{y}{y_1}, \tag{3}$$

где $y(x)$ – общее решение уравнения (1), а $y_1(x)$ – частное решение, которое может быть найдено с помощью квадратуры, если известна функция $\xi(x)$ [2]. В данном случае мы определяем $y_1(x)$, задав конкретный набор произвольных постоянных $(C_{10}, C_{20}, C_{30}, C_{40})$.

В работах [3–5] решалась задача о нахождении семейств решений для НЛДУ 4-го порядка с неизвестной функцией $i(x)$ полученного из уравнения (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$p' + \frac{1}{4}p^2 - \frac{2}{3}q = 0, q' + \frac{1}{4}pq - \frac{3}{2}r = 0, r' + \frac{1}{4}pr - 4s = 0. \tag{4}$$

Постановка задачи и основной результат. В данной работе решаются следующие задачи: для линейного уравнения с постоянными коэффициентами и линейного уравнения Эйлера четвертого порядка построить соответствующие уравнения (A), а также найти двухпараметрические семейства решений этих нелинейных уравнений четвертого порядка при заданных значениях параметров.

I. Рассмотрим ЛДУ четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(IV)} + \alpha y''' + \beta y'' + \gamma y' + \delta y = 0. \tag{5}$$

Тогда общее решение уравнения (5) может быть записано в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{4} C_i e^{x\mathrm{Root}\left[\#1^4+\alpha\#1^3+\beta\#1^2+\gamma\#1+\delta\&,i\right]}, \tag{6}$$

где C_i $(i = 1,2,3,4)$ – произвольные постоянные, $\mathrm{Root}[\#1^4 + \alpha\#1^3 + +\beta\#1^2+\gamma\#1+\delta\&, i]$ – объект [6], который определяет i-й корень характеристического уравнения для уравнения (5), согласно формулам Феррари.

НЛДУ 4-го порядка, соответствующее уравнению (А), имеет вид

$$\begin{gathered}
64i^6 + 96\alpha^2 i^5 - 256\beta i^5 + 48\alpha^4 i^4 + 352\beta^2 i^4 - 256\alpha^2\beta i^4 - 32\alpha\gamma i^4 + 128\delta i^4+\\
+448i'' i^4 + 8\alpha^6 i^3 - 224\beta^3 i^3 + 192\alpha^2\beta^2 i^3 - 208\gamma^2 i^3 - 560\,(i')^2\, i^3 - 64\alpha^4\beta i^3-\\
-64\alpha^3\gamma i^3 + 240\alpha\beta\gamma i^3 + 48\alpha^2\delta i^3 - 128\beta\delta i^3 + 96\alpha^3 i' i^3 - 384\alpha\beta i' i^3 + 768\gamma i' i^3+\\
+384\alpha^2 i'' i^3 - 1024\beta i'' i^3 + 160 i^{(4)} i^3 + 68\beta^4 i^2 - 48\alpha^2\beta^3 i^2 + 8\alpha^4\beta^2 i^2 - 100\alpha^2\gamma^2 i^2+\\
+192\beta\gamma^2 i^2 - 448\delta^2 i^2 - 408\alpha^2\,(i')^2\, i^2 + 1088\beta\,(i')^2\, i^2 + 192\,(i'')^2\, i^2 - 24\alpha^5\gamma i^2-\\
-216\alpha\beta^2\gamma i^2 + 152\alpha^3\beta\gamma i^2 + 24\alpha^4\delta i^2 + 96\beta^2\delta i^2 - 128\alpha^2\beta\delta i^2 + 224\alpha\gamma\delta i^2+\\
+48\alpha^5 i' i^2 + 512\alpha\beta^2 i' i^2 - 320\alpha^3\beta i' i^2 + 384\alpha^2\gamma i' i^2 - 1024\beta\gamma i' i^2 + 72\alpha^4 i'' i^2+\\
+624\beta^2 i'' i^2 - 384\alpha^2\beta i'' i^2 - 336\alpha\gamma i'' i^2 + 1344\delta i'' i^2 + 112\alpha^3 i^{(3)} i^2 - 448\alpha\beta i^{(3)} i^2+\\
+896\gamma i^{(3)} i^2 - 1120 i' i^{(3)} i^2 + 72\alpha^2 i^{(4)} i^2 - 192\beta i^{(4)} i^2 - 8\beta^5 i + 2\alpha^2\beta^4 i + 108\alpha\gamma^3 i+\\
+18\alpha^4\gamma^2 i - 36\beta^2\gamma^2 i - 84\alpha^2\beta\gamma^2 i - 144\alpha^2\delta^2 i + 384\beta\delta^2 i + 18\alpha^4\,(i')^2\, i-\\
-252\beta^2\,(i')^2\, i - 96\alpha^2\beta\,(i')^2\, i + 1140\alpha\gamma\,(i')^2\, i - 4560\delta\,(i')^2\, i + 90\alpha^2\,(i'')^2\, i-\\
-240\beta\,(i'')^2\, i - 280\,(i''')^2\, i + 52\alpha\beta^3\gamma i - 12\alpha^3\beta^2\gamma i - 64\beta^3\delta i + 12\alpha^2\beta^2\delta i-\\
-432\gamma^2\delta i - 36\alpha^3\gamma\delta i + 240\alpha\beta\gamma\delta i - 128\alpha\beta^3 i' i + 32\alpha^3\beta^2 i' i - 768\alpha\gamma^2 i' i - 96\alpha^4\gamma i' i+\\
+256\beta^2\gamma i' i + 384\alpha^2\beta\gamma i' i + 384\alpha^3\delta i' i - 1536\alpha\beta\delta i' i + 3072\gamma\delta i' i + 12\alpha^6 i'' i-\\
-80\beta^3 i'' i + 224\alpha^2\beta^2 i'' i + 840\gamma^2 i'' i + 2040\,(i')^2\, i'' i - 96\alpha^4\beta i'' i + 96\alpha^3\gamma i'' i-\\
-536\alpha\beta\gamma i'' i + 456\alpha^2\delta i'' i - 1216\beta\delta i'' i - 396\alpha^3 i' i'' i + 1584\alpha\beta i' i'' i - 3168\gamma i' i'' i+\\
+24\alpha^5 i^{(3)} i + 256\alpha\beta^2 i^{(3)} i - 160\alpha^3\beta i^{(3)} i + 192\alpha^2\gamma i^{(3)} i - 512\beta\gamma i^{(3)} i - 336\alpha^2 i' i^{(3)} i+\\
+896\beta i' i^{(3)} i + 12\alpha^4 i^{(4)} i + 72\beta^2 i^{(4)} i - 64\alpha^2\beta i^{(4)} i + 40\alpha\gamma i^{(4)} i - 160\delta i^{(4)} i+
\end{gathered}$$

$$+240i''i^{(4)}i-27\gamma^4-1275\left(i'\right)^4-4\alpha^3\gamma^3+18\alpha\beta\gamma^3+256\delta^3+390\alpha^3\left(i'\right)^3-$$
$$-1560\alpha\beta\left(i'\right)^3+3120\gamma\left(i'\right)^3-504\left(i''\right)^3-4\beta^3\gamma^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2-27\alpha^4\delta^2-128\beta^2\delta^2+$$
$$+144\alpha^2\beta\delta^2-192\alpha\gamma\delta^2-15\alpha^6\left(i'\right)^2-124\beta^3\left(i'\right)^2-224\alpha^2\beta^2\left(i'\right)^2-2058\gamma^2\left(i'\right)^2+$$
$$+120\alpha^4\beta\left(i'\right)^2-288\alpha^3\gamma\left(i'\right)^2+1454\alpha\beta\gamma\left(i'\right)^2-906\alpha^2\delta\left(i'\right)^2+2416\beta\delta\left(i'\right)^2-$$
$$-54\alpha^4\left(i''\right)^2-180\beta^2\left(i''\right)^2+288\alpha^2\beta\left(i''\right)^2-612\alpha\gamma\left(i''\right)^2+2448\delta\left(i''\right)^2-$$
$$-21\alpha^2\left(i'''\right)^2+56\beta\left(i'''\right)^2+16\beta^4\delta-4\alpha^2\beta^3\delta-6\alpha^2\gamma^2\delta+144\beta\gamma^2\delta-80\alpha\beta^2\gamma\delta+$$
$$+18\alpha^3\beta\gamma\delta-16\alpha\beta^4i'+4\alpha^3\beta^3i'+432\gamma^3i'+54\alpha^3\gamma^2i'-360\alpha\beta\gamma^2i'+32\beta^3\gamma i'+$$
$$+72\alpha^2\beta^2\gamma i'-18\alpha^4\beta\gamma i'+54\alpha^5\delta i'+576\alpha\beta^2\delta i'-360\alpha^3\beta\delta i'+432\alpha^2\gamma\delta i'-$$
$$-1152\beta\gamma\delta i'-16\beta^4i''-4\alpha^2\beta^3i''+2\alpha^4\beta^2i''-22\alpha^2\gamma^2i''-240\beta\gamma^2i''-1792\delta^2i''+$$
$$+234\alpha^2\left(i'\right)^2i''-624\beta\left(i'\right)^2i''-6\alpha^5\gamma i''+112\alpha\beta^2\gamma i''+2\alpha^3\beta\gamma i''+114\alpha^4\delta i''+$$
$$+512\beta^2\delta i''-608\alpha^2\beta\delta i''+896\alpha\gamma\delta i''-36\alpha^5i'i''-384\alpha\beta^2i'i''+240\alpha^3\beta i'i''-$$
$$-288\alpha^2\gamma i'i''+768\beta\gamma i'i''-16\alpha\beta^3i^{(3)}+4\alpha^3\beta^2i^{(3)}-96\alpha\gamma^2i^{(3)}-12\alpha^4\gamma i^{(3)}+$$
$$+32\beta^2\gamma i^{(3)}+48\alpha^2\beta\gamma i^{(3)}+48\alpha^3\delta i^{(3)}-192\alpha\beta\delta i^{(3)}+384\gamma\delta i^{(3)}+24\alpha^4i'i^{(3)}+$$
$$+24\beta^2i'i^{(3)}-128\alpha^2\beta i'i^{(3)}+440\alpha\gamma i'i^{(3)}-1760\delta i'i^{(3)}-42\alpha^3i''i^{(3)}+168\alpha\beta i''i^{(3)}-$$
$$-336\gamma i''i^{(3)}+840i'i''i^{(3)}-8\beta^3i^{(4)}+2\alpha^2\beta^2i^{(4)}-36\gamma^2i^{(4)}-300\left(i'\right)^2i^{(4)}-6\alpha^3\gamma i^{(4)}+$$
$$+28\alpha\beta\gamma i^{(4)}-12\alpha^2\delta i^{(4)}+32\beta\delta i^{(4)}+30\alpha^3i'i^{(4)}-120\alpha\beta i'i^{(4)}+240\gamma i'i^{(4)}+$$
$$+18\alpha^2i''i^{(4)}-48\beta i''i^{(4)}=0. \qquad (7)$$

Замечание 1. Подставив общее решение (6) и частное решение, полученное из общего решения (6) при заданном наборе $(C_{10}, C_{20}, C_{30}, C_{40})$ в формулу (3), найдем функцию $\xi(x)$. Подставляя затем найденную функцию $\xi(x)$ вместе со своими производными до третьего порядка включительно в равенство (2), найдем функцию $i(x)$, которая будет определять семейство решений уравнения (7). Чтобы ответить на вопрос о количестве присутствующих в определении функции $i(x)$ произвольных постоянных, поступим следующим образом. Продифференцируем функцию $i(x)$ дважды и исключим из получившейся системы трех уравнений две постоянные из четырех присутствующих C_1, C_2, C_3, C_4. В результате получим НЛДУ второго порядка третьей степени, для которого найденная функция $i(x)$ будет определять общее решение. Следовательно, функция $i(x)$ будет являться и двухпараметрическим семейством решений уравнения (7).

Пример 1. Пусть заданы величины

$$\alpha=-10, \beta=35, \gamma=-50, \delta=24.$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$y^{(IV)} - 10y''' + 35y'' - 50y' + 24y = 0. \tag{8}$$

Согласно формуле (6), которая в нашем случае примет вид

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{4x},$$

найдем функцию (3)

$$\xi(x) = C_1 e^{-x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{2x} + C_2,$$

где частное решение было выбрано в виде $y_1(x) = e^{2x}$. Функция $i(x)$ тогда определяется соотношением

$$i(x) = -\frac{2C_1 e^{2x}\left(22C_4 e^{x} + 5C_3\right) + e^{4x}\left(4C_4 C_3 e^{x} + 16C_4^2 e^{2x} + C_3^2\right) + C_1^2}{2\left(C_1 - e^{2x}\left(2C_4 e^{x} + C_3\right)\right)^2}. \tag{9}$$

Уравнение (7) примет вид

$$\begin{gathered}
144 + 64i^6 + 640i^5 + 2272i^4 + 3680i^3 + 2852i^2 + 1040i - 140i'''^2 + \\
+192i^2 i''^2 + 4656i^2 i'' + 600ii''^2 + 2960ii'' - 504i''^3 + 252i''^2 + 608i'' - \\
-280i'''^2 i - 4140ii'^2 - 1275i'^4 - 1460i'^2 + 160i^{(4)} i^3 + 448i^4 i'' + 240i^{(4)} ii'' + \\
+120i^{(4)} i'' + 480i^{(4)} i^2 - 300i^{(4)} i'^2 + 2560i^3 i'' - 560i^3 i'^2 - 2240i^{(3)} ii' - \\
-840i^{(3)} i' + 2040ii'^2 i'' + 1560i'^2 i'' - 2720i^2 i'^2 + 840i^{(3)} i' i'' - 1120i^{(3)} i^2 i' + \\
+360ii^{(4)} + 80i^{(4)} = 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Дифференцируя дважды функцию (9) и исключая две постоянные из получившейся системы трех уравнений, построим НЛДУ второго порядка вида

$$\begin{gathered}
548 + 2048i^6 + 3360i^5 - 3456i^4 - 3280i^3 + 2544i^2 + 2610i - 96i^2 i''^2 + 552i^2 i'' - \\
-240ii''^2 - 620ii'' - 96i''^2 - 274i'' - 1500ii'^3 - 2250ii'^2 + 1300ii' - \\
-375i'^4 - 750i'^3 - 875i'^2 - 160i' - 1024i^4 i'' - 4960i^4 i' + 880i^3 i'' + \\
+5000i^3 i'^2 + 2800i^3 i' + 1500i^2 i'^2 + 5880i^2 i' + 1200ii' i'' - 360i' i''^2 + \\
+750i'^2 i'' + 1020i' i'' - 1680i^2 i' i'' + 1500ii'^2 i'' + 72i''^3 = 0.
\end{gathered} \tag{11}$$

Имеет место

Теорема 1. *Функция (9) определяет общее решение уравнения (11) и двухпараметрическое семейство решений уравнения (10).*

Замечание 2. Если вместо частного решения $y_1(x) = e^{2x}$ взять другое частное решение, то получим дифференциальное уравнение второго порядка третьей степени, вообще говоря, с переменными коэффициентами.

II. Рассмотрим уравнение Эйлера четвертого порядка

$$x^4y^{(IV)} + \alpha x^3y''' + \beta x^2y'' + \gamma xy' + \delta y = 0. \tag{12}$$

Общее решение уравнения (12) может быть записано в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{4} C_i x^{\mathrm{Root}[\#1^4+(\alpha-6)\#1^3+(\beta-3\alpha+11)\#1^2+(2\alpha-\beta+\gamma-6)\#1+\delta\&,i]}, \tag{13}$$

где $C_(i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ — произвольные постоянные, $\mathrm{Root}[\#1^4+(\alpha-6)\#1^3+ + (\beta - 3\alpha + 11)\#1^2 + (2\alpha - \beta + \gamma - 6)\#1 + \delta\&, i]$ — объект [6], который определяет i-й корень уравнения $\lambda^4 + (\alpha - 6)\lambda^3 + (\beta - 3\alpha + 11)\lambda^2 + (2\alpha - - \beta + \gamma - 6)\lambda + \delta = 0$ согласно формулам Феррари.

НЛДУ 4-го порядка, соответствующее уравнению (А), имеет вид

$$64i^6x^{12} - 1275\,(i')^4\,x^{12} - 504\,(i'')^3\,x^{12} - 27\gamma^4 - 4\alpha^3\gamma^3 + 18\alpha^2\gamma^3 - 180\alpha\gamma^3+$$
$$+18\alpha\beta\gamma^3 + 648\gamma^3 + 256\delta^3 + (390\alpha^3x^9 - 1170\alpha^2x^9 - 1560\alpha x^9 - 1560\alpha\beta x^9+$$
$$+3120\beta x^9 + 3120\gamma x^9)\,(i')^3 - 24\alpha^4\gamma^2 + 204\alpha^3\gamma^2 - 4\beta^3\gamma^2 - 540\alpha^2\gamma^2+$$
$$+\alpha^2\beta^2\gamma^2 - 30\alpha\beta^2\gamma^2 + 84\beta^2\gamma^2 + 432\alpha\gamma^2 + 6\alpha^3\beta\gamma^2 + 82\alpha^2\beta\gamma^2 - 732\alpha\beta\gamma^2+$$
$$+1296\beta\gamma^2 - 27\alpha^4\delta^2 + 216\alpha^3\delta^2 - 528\alpha^2\delta^2 - 128\beta^2\delta^2 + 384\alpha\delta^2 + 144\alpha^2\beta\delta^2-$$
$$-768\alpha\beta\delta^2 + 1024\beta\delta^2 - 192\alpha\gamma\delta^2 + 1152\gamma\delta^2 + (-560i^3x^{12} - 15\alpha^6x^6 + 165\alpha^4x^6+$$
$$+270\alpha^3x^6 - 124\beta^3x^6 + 120\alpha^2x^6 - 224\alpha^2\beta^2x^6 + 430\alpha\beta^2x^6 - 1728\beta^2x^6 - 2058\gamma^2x^6+$$
$$+120\alpha^4\beta x^6 - 48\alpha^3\beta x^6 - 222\alpha^2\beta x^6 - 3024\alpha\beta x^6 - 288\alpha^3\gamma x^6 - 618\alpha^2\gamma x^6+$$
$$+1080\alpha\gamma x^6 + 1454\alpha\beta\gamma x^6 - 768\beta\gamma x^6 + 18000\gamma x^6 - 906\alpha^2\delta x^6 + 3624\alpha\delta x^6+$$
$$+2416\beta\delta x^6 + 24000\delta x^6 + i^2\left(-408\alpha^2x^{10} + 1632\alpha x^{10} + 1088\beta x^{10}\right) + i(18\alpha^4x^8+$$
$$+216\alpha^3x^8 - 882\alpha^2x^8 - 252\beta^2x^8 - 1080\alpha x^8 - 96\alpha^2\beta x^8 + 84\alpha\beta x^8 - 1440\beta x^8+$$
$$+1140\alpha\gamma x^8 - 3960\gamma x^8 - 4560\delta x^8)\,(i')^2 + (192i^2x^{12} - 54\alpha^4x^8 + 54\alpha^3x^8+$$
$$+540\alpha^2x^8 - 180\beta^2x^8 + 432\alpha x^8 + 288\alpha^2\beta x^8 - 252\alpha\beta x^8 - 1296\beta x^8 - 612\alpha\gamma x^8+$$
$$+648\gamma x^8 + 2448\delta x^8 + i\left(90\alpha^2x^{10} - 360\alpha x^{10} - 240\beta x^{10}\right))\,(i'')^2 + (-280ix^{12}-$$
$$-21\alpha^2x^{10} + 84\alpha x^{10} + 56\beta x^{10})(i^{(3)})^2 + i^5(96\alpha^2x^{10} - 384\alpha x^{10} - 256\beta x^{10})+$$

$$+8\beta^4\gamma-2\alpha^2\beta^3\gamma-36\alpha\beta^3\gamma+144\beta^3\gamma+10\alpha^3\beta^2\gamma-8\alpha^2\beta^2\gamma-264\alpha\beta^2\gamma+$$
$$+576\beta^2\gamma-12\alpha^4\beta\gamma+108\alpha^3\beta\gamma-312\alpha^2\beta\gamma+288\alpha\beta\gamma+16\beta^4\delta-$$
$$-4\alpha^2\beta^3\delta-64\alpha\beta^3\delta+256\beta^3\delta+18\alpha^3\beta^2\delta-28\alpha^2\beta^2\delta-352\alpha\beta^2\delta+768\beta^2\delta-$$
$$-6\alpha^2\gamma^2\delta-360\alpha\gamma^2\delta+144\beta\gamma^2\delta+1584\gamma^2\delta-18\alpha^4\beta\delta+156\alpha^3\beta\delta-432\alpha^2\beta\delta+$$
$$+384\alpha\beta\delta-54\alpha^4\gamma\delta+444\alpha^3\gamma\delta-1128\alpha^2\gamma\delta-80\alpha\beta^2\gamma\delta+192\beta^2\gamma\delta+864\alpha\gamma\delta+$$
$$+18\alpha^3\beta\gamma\delta+168\alpha^2\beta\gamma\delta-1520\alpha\beta\gamma\delta+2496\beta\gamma\delta+\imath^4(48\alpha^4x^8-192\alpha^3x^8-$$
$$-48\alpha^2x^8+352\beta^2x^8+192\alpha x^8-256\alpha^2\beta x^8+224\alpha\beta x^8+2304\beta x^8-32\alpha\gamma x^8+$$
$$+1728\gamma x^8+128\delta x^8)+\imath^3(8\alpha^6x^6-88\alpha^4x^6-144\alpha^3x^6-224\beta^3x^6-64\alpha^2x^6+$$
$$+192\alpha^2\beta^2x^6+496\alpha\beta^2x^6-2560\beta^2x^6-208\gamma^2x^6-64\alpha^4\beta x^6-192\alpha^3\beta x^6+$$
$$+1424\alpha^2\beta x^6-128\alpha\beta x^6-64\alpha^3\gamma x^6+1200\alpha^2\gamma x^6-576\alpha\gamma x^6+240\alpha\beta\gamma x^6-$$
$$-3072\beta\gamma x^6-9600\gamma x^6+48\alpha^2\delta x^6-192\alpha\delta x^6-128\beta\delta x^6-12800\delta x^6)+$$
$$+\imath^2(-24x^4\beta\alpha^5-24x^4\gamma\alpha^5+8x^4\beta^2\alpha^4+72x^4\beta\alpha^4+72x^4\gamma\alpha^4+24x^4\delta\alpha^4+$$
$$+152x^4\beta^2\alpha^3+144x^4\beta\alpha^3+528x^4\gamma\alpha^3+152x^4\beta\gamma\alpha^3+576x^4\delta\alpha^3-48x^4\beta^3\alpha^2-$$
$$-364x^4\beta^2\alpha^2-100x^4\gamma^2\alpha^2-144x^4\beta\alpha^2-4176x^4\gamma\alpha^2-472x^4\beta\gamma\alpha^2-6000x^4\delta\alpha^2+$$
$$-128x^4\beta\delta\alpha^2-280x^4\beta^3\alpha-592x^4\beta^2\alpha-912x^4\gamma^2\alpha-192x^4\beta\alpha+9792x^4\gamma\alpha-$$
$$-216x^4\beta^2\gamma\alpha-2496x^4\beta\gamma\alpha+13248x^4\delta\alpha-2336x^4\beta\delta\alpha+224x^4\gamma\delta\alpha+$$
$$+68x^4\beta^4+704x^4\beta^3-1344x^4\beta^2+3168x^4\gamma^2+192x^4\beta\gamma^2-448x^4\delta^2+1424x^4\beta^2\gamma+$$
$$+10176x^4\beta\gamma+96x^4\beta^2\delta+16128x^4\beta\delta+4800x^4\gamma\delta)+\imath(72x^2\gamma\alpha^5+108x^2\delta\alpha^5-$$
$$-6x^2\beta^2\alpha^4+18x^2\gamma^2\alpha^4-432x^2\gamma\alpha^4-612x^2\delta\alpha^4-4x^2\beta^3\alpha^3+36x^2\beta^2\alpha^3-$$
$$-72x^2\gamma^2\alpha^3+360x^2\gamma\alpha^3-12x^2\beta^2\gamma\alpha^3-492x^2\beta\gamma\alpha^3+432x^2\delta\alpha^3-756x^2\beta\delta\alpha^3-$$
$$-36x^2\gamma\delta\alpha^3+2x^2\beta^4\alpha^2+56x^2\beta^3\alpha^2-48x^2\beta^2\alpha^2+492x^2\gamma^2\alpha^2-84x^2\beta\gamma^2\alpha^2-$$
$$-144x^2\delta^2\alpha^2+864x^2\gamma\alpha^2+60x^2\beta^2\gamma\alpha^2+1944x^2\beta\gamma\alpha^2+1152x^2\delta\alpha^2+12x^2\beta^2\delta\alpha^2+$$
$$+2832x^2\beta\delta\alpha^2+792x^2\gamma\delta\alpha^2+12x^2\beta^4\alpha-144x^2\beta^3\alpha+108x^2\gamma^3\alpha+432x^2\gamma^2\alpha+$$
$$+180x^2\beta\gamma^2\alpha+576x^2\delta^2\alpha+52x^2\beta^3\gamma\alpha+760x^2\beta^2\gamma\alpha+1056x^2\beta\gamma\alpha+1344x^2\beta^2\delta\alpha+$$
$$+1728x^2\beta\delta\alpha+1248x^2\gamma\delta\alpha+240x^2\beta\gamma\delta\alpha-8x^2\beta^5-96x^2\beta^4+216x^2\gamma^3-$$
$$-8640x^2\gamma^2-36x^2\beta^2\gamma^2-1296x^2\beta\gamma^2-7680x^2\delta^2+384x^2\beta\delta^2-176x^2\beta^3\gamma-$$
$$-2016x^2\beta^2\gamma-5760x^2\beta\gamma-64x^2\beta^3\delta-3328x^2\beta^2\delta-432x^2\gamma^2\delta-7680x^2\beta\delta-$$
$$-17280x^2\gamma\delta-2880x^2\beta\gamma\delta)+(-12x^3\beta\alpha^5+24x^3\gamma\alpha^5+54x^3\delta\alpha^5-8x^3\beta^2\alpha^4+$$
$$+60x^3\beta\alpha^4+60x^3\gamma\alpha^4-18x^3\beta\gamma\alpha^4+30x^3\delta\alpha^4+4x^3\beta^3\alpha^3+104x^3\beta^2\alpha^3+$$

$$+54x^3\gamma^2\alpha^3-24x^3\beta\alpha^3-1212x^3\gamma\alpha^3-98x^3\beta\gamma\alpha^3-1752x^3\delta\alpha^3-360x^3\beta\delta\alpha^3+$$
$$+28x^3\beta^3\alpha^2-176x^3\beta^2\alpha^2-2x^3\gamma^2\alpha^2-96x^3\beta\alpha^2+1632x^3\gamma\alpha^2+72x^3\beta^2\gamma\alpha^2-$$
$$-512x^3\beta\gamma\alpha^2+2112x^3\delta\alpha^2-448x^3\beta\delta\alpha^2+432x^3\gamma\delta\alpha^2-16x^3\beta^4\alpha-168x^3\beta^3\alpha-$$
$$-288x^3\beta^2\alpha+1464x^3\gamma^2\alpha-360x^3\beta\gamma^2\alpha+2880x^3\gamma\alpha+128x^3\beta^2\gamma\alpha+5088x^3\beta\gamma\alpha+$$
$$+3840x^3\delta\alpha+576x^3\beta^2\delta\alpha+7712x^3\beta\delta\alpha+2752x^3\gamma\delta\alpha-16x^3\beta^4-192x^3\beta^3+$$
$$+432x^3\gamma^3-8640x^3\gamma^2-336x^3\beta\gamma^2-8960x^3\delta^2+32x^3\beta^3\gamma+144x^3\beta^2\gamma-$$
$$-2880x^3\beta\gamma+i^3(96\alpha^3x^9-288\alpha^2x^9-384\alpha x^9-384\alpha\beta x^9+768\beta x^9+$$
$$+768\gamma x^9)+256x^3\beta^2\delta-3840x^3\beta\delta-18240x^3\gamma\delta-1152x^3\beta\gamma\delta+i^2(48\alpha^5x^7-$$
$$-48\alpha^4x^7-480\alpha^3x^7-384\alpha^2x^7+512\alpha\beta^2x^7+64\beta^2x^7-320\alpha^3\beta x^7+2240\alpha\beta x^7+$$
$$+3840\beta x^7+384\alpha^2\gamma x^7+1344\alpha\gamma x^7-1024\beta\gamma x^7-5760\gamma x^7-11520\delta x^7)+$$
$$+i(-128\alpha\beta^3x^5-384\beta^3x^5+32\alpha^3\beta^2x^5+416\alpha^2\beta^2x^5-576\alpha\beta^2x^5-$$
$$-4608\beta^2x^5-768\alpha\gamma^2x^5+576\gamma^2x^5-96\alpha^4\beta x^5+288\alpha^3\beta x^5+960\alpha^2\beta x^5-$$
$$-2304\alpha\beta x^5-96\alpha^4\gamma x^5+480\alpha^3\gamma x^5-1536\alpha^2\gamma x^5+256\beta^2\gamma x^5+4608\alpha\gamma x^5+$$
$$+384\alpha^2\beta\gamma x^5-1472\alpha\beta\gamma x^5+1536\beta\gamma x^5+384\alpha^3\delta x^5-3648\alpha^2\delta x^5+8448\alpha\delta x^5-$$
$$-1536\alpha\beta\delta x^5+9728\beta\delta x^5+3072\gamma\delta x^5))i'+(448i^4x^{12}-16\beta^4x^4-4\alpha^2\beta^3x^4-$$
$$-16\alpha\beta^3x^4-240\beta^3x^4+2\alpha^4\beta^2x^4+22\alpha^3\beta^2x^4+128\alpha^2\beta^2x^4-648\alpha\beta^2x^4-$$
$$-576\beta^2x^4-22\alpha^2\gamma^2x^4+120\alpha\gamma^2x^4-240\beta\gamma^2x^4-648\gamma^2x^4-1792\delta^2x^4-$$
$$-6\alpha^5\beta x^4-6\alpha^4\beta x^4+168\alpha^3\beta x^4-120\alpha^2\beta x^4-288\alpha\beta x^4-6\alpha^5\gamma x^4+66\alpha^4\gamma x^4-$$
$$-192\alpha^3\gamma x^4-696\alpha^2\gamma x^4+112\alpha\beta^2\gamma x^4+96\beta^2\gamma x^4+3168\alpha\gamma x^4+2\alpha^3\beta\gamma x^4-$$
$$-232\alpha^2\beta\gamma x^4+408\alpha\beta\gamma x^4+2304\beta\gamma x^4+114\alpha^4\delta x^4-480\alpha^3\delta x^4-1032\alpha^2\delta x^4+$$
$$+512\beta^2\delta x^4+4512\alpha\delta x^4-608\alpha^2\beta\delta x^4+1600\alpha\beta\delta x^4+4032\beta\delta x^4+896\alpha\gamma\delta x^4-$$
$$-1920\gamma\delta x^4+(2040ix^{12}+234\alpha^2x^{10}-936\alpha x^{10}-624\beta x^{10})(i')^2+i^3(384\alpha^2x^{10}-$$
$$-1536\alpha x^{10}-1024\beta x^{10})+i^2(72\alpha^4x^8-360\alpha^3x^8+144\alpha^2x^8+624\beta^2x^8+$$
$$+576\alpha x^8-384\alpha^2\beta x^8+336\alpha\beta x^8+4032\beta x^8-336\alpha\gamma x^8+3744\gamma x^8+1344\delta x^8)+$$
$$+i(12\alpha^6x^6-132\alpha^4x^6-216\alpha^3x^6-80\beta^3x^6-96\alpha^2x^6+224\alpha^2\beta^2x^6+$$
$$+104\alpha\beta^2x^6-768\beta^2x^6+840\gamma^2x^6-96\alpha^4\beta x^6-96\alpha^3\beta x^6+984\alpha^2\beta x^6+1344\alpha\beta x^6+$$
$$+96\alpha^3\gamma x^6+1032\alpha^2\gamma x^6-864\alpha\gamma x^6-536\alpha\beta\gamma x^6-1536\beta\gamma x^6-14400\gamma x^6+$$
$$+456\alpha^2\delta x^6-1824\alpha\delta x^6-1216\beta\delta x^6-19200\delta x^6)+(-36\alpha^5x^7+36\alpha^4x^7+$$
$$+360\alpha^3x^7+288\alpha^2x^7-384\alpha\beta^2x^7-48\beta^2x^7+240\alpha^3\beta x^7-1680\alpha\beta x^7-2880\beta x^7-$$

$$-288\alpha^2\gamma x^7-1008\alpha\gamma x^7+768\beta\gamma x^7+4320\gamma x^7+8640\delta x^7+i(-396\alpha^3x^9+$$
$$+1188\alpha^2x^9+1584\alpha x^9+1584\alpha\beta x^9-3168\beta x^9-3168\gamma x^9))i')i''+(-16\alpha\beta^3x^5-$$
$$-48\beta^3x^5+4\alpha^3\beta^2x^5+52\alpha^2\beta^2x^5-72\alpha\beta^2x^5-576\beta^2x^5-96\alpha\gamma^2x^5+72\gamma^2x^5-$$
$$-12\alpha^4\beta x^5+36\alpha^3\beta x^5+120\alpha^2\beta x^5-288\alpha\beta x^5-12\alpha^4\gamma x^5+60\alpha^3\gamma x^5-192\alpha^2\gamma x^5+$$
$$+32\beta^2\gamma x^5+576\alpha\gamma x^5+48\alpha^2\beta\gamma x^5-184\alpha\beta\gamma x^5+192\beta\gamma x^5+48\alpha^3\delta x^5-$$
$$-456\alpha^2\delta x^5+1056\alpha\delta x^5-192\alpha\beta\delta x^5+1216\beta\delta x^5+384\gamma\delta x^5+i^2(112\alpha^3x^9-$$
$$-336\alpha^2x^9-448\alpha x^9-448\alpha\beta x^9+896\beta x^9+896\gamma x^9)+i(24\alpha^5x^7-24\alpha^4x^7-$$
$$-240\alpha^3x^7-192\alpha^2x^7+256\alpha\beta^2x^7+32\beta^2x^7-160\alpha^3\beta x^7+1120\alpha\beta x^7+$$
$$+1920\beta x^7+192\alpha^2\gamma x^7+672\alpha\gamma x^7-512\beta\gamma x^7-2880\gamma x^7-5760\delta x^7)+$$
$$+(-1120i^2x^{12}+24\alpha^4x^8+18\alpha^3x^8-366\alpha^2x^8+24\beta^2x^8-360\alpha x^8-128\alpha^2\beta x^8+$$
$$+112\alpha\beta x^8+240\beta x^8+440\alpha\gamma x^8-960\gamma x^8-1760\delta x^8+i(-336\alpha^2x^{10}+1344\alpha x^{10}+$$
$$+896\beta x^{10}))i'+(840i'x^{12}-42\alpha^3x^9+126\alpha^2x^9+168\alpha x^9+168\alpha\beta x^9-336\beta x^9-$$
$$-336\gamma x^9)i'')i^{(3)}+(160i^3x^{12}-300\,(i')^2\,x^{12}-8\beta^3x^6+2\alpha^2\beta^2x^6+20\alpha\beta^2x^6-$$
$$-96\beta^2x^6-36\gamma^2x^6-6\alpha^3\beta x^6+36\alpha^2\beta x^6-48\alpha\beta x^6-6\alpha^3\gamma x^6+24\alpha^2\gamma x^6+$$
$$+28\alpha\beta\gamma x^6-96\beta\gamma x^6-12\alpha^2\delta x^6+48\alpha\delta x^6+32\beta\delta x^6+i^2(72\alpha^2x^{10}-288\alpha x^{10}-$$
$$-192\beta x^{10})+i(12\alpha^4x^8-36\alpha^3x^8-48\alpha^2x^8+72\beta^2x^8-64\alpha^2\beta x^8+56\alpha\beta x^8+$$
$$+480\beta x^8+40\alpha\gamma x^8+240\gamma x^8-160\delta x^8)+(30\alpha^3x^9-90\alpha^2x^9-120\alpha x^9-120\alpha\beta x^9+$$
$$+240\beta x^9+240\gamma x^9)i'+(240ix^{12}+18\alpha^2x^{10}-72\alpha x^{10}-48\beta x^{10})i'')i^{(4)}=0. \quad (14)$$

Для отыскания двухпараметрического семейства решений уравнения (14) будем использовать алгоритм, описанный в замечании 1.

Пример 2. Пусть заданы величины

$$\alpha=-4, \beta=12, \gamma=-24, \delta=24.$$

Тогда уравнение (12) примет вид

$$x^4y^{(IV)}-4x^3y'''+12x^2y''-24xy'+24y=0. \quad (15)$$

Согласно формуле (13), которая в нашем случае примет вид

$$y(x)=C_1x+C_2x^2+C_3x^3+C_4x^4,$$

найдем функцию (3)

$$\xi(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3,$$

где частное решение было выбрано в виде $y_1(x) = x$. Функция $i(x)$ тогда определяется соотношением

$$i(x) = -\frac{6(C_4(6C_4x^2 - C_2) + 4C_4C_3x + C_3^2)}{(x(3C_4x + 2C_3) + C_2)^2}. \tag{16}$$

Уравнение (14) примет вид

$$64i^6 - 560i^3i'^2 - 1275i'^4 + 192i^2i''^2 - 504i''^3 + 448i^4i'' + 2040ii'^2i'' + 840i'''i'i'' -$$

$$-1120i'''i^2i' - 280i'''^2i + 160i^{(4)}i^3 - 300i^{(4)}i'^2 + 240i^{(4)}ii'' = 0. \tag{17}$$

Дифференцируя дважды функцию (16) и исключая две постоянные из получившейся системы, построим НЛДУ второго порядка вида

$$2048i^6 - 375i'^4 + 5000i^3i'^2 + 1500i - 1024i^4i''i'^2i'' -$$

$$-96i^2i''^2 + 72i''^3 = 0. \tag{18}$$

Имеет место

Теорема 2. *Функция (16) определяет общее решение уравнения (18) и двухпараметрическое семейство решений уравнения (17).*

Замечание 3. Если вместо частного решения $y_1(x) = x$ взять другое частное решение, то получим дифференциальное уравнение второго порядка третьей степени, вообще говоря, с переменными коэффициентами.

Так, например, если $y_1(x) = x - x^2$, то функция $i(x)$ имеет вид

$$i(x) = -6(C_4^2x^4 - 4C_4^2x^3 + 6C_4^2x^2 + 4C_3C_4x + C_1(C_4(4x-1) + C_3) +$$

$$+C_2(C_4(4x-1) + C_3) + C_3^2)/(x(C_3(2-x) + C_4(3-2x)x) + C_1 + C_2)^2,$$

а соответствующее дифференциальное уравнение второго порядка есть

$$2048i^6(x-1)^2 + 3200i^5 + 3000i(x-1)i'^3 - 375(x-1)^2i'^4 + 9920i^4(x-1)i' -$$

$$-48(x-1)(2i^2(x-1) - 15i')i''^2 + 200i^2(25i(x-1)^2 + 6)i'^2 + 4i''(-256i^4(x-1)^2 +$$

$$+1200i^3 + 75(5i(x-1)^2 + 6)i'^2 + 840i^2(x-1)i') + 72(x-1)^2i''^3 = 0.$$

Замечание 4. Уравнение (15) имеет коэффициенты, удовлетворяющие условиям (4). Уравнение (17) исследовалось на предмет наличия семейств решений в работах [1–3, 5].

Список литературы

1. Чичурин, А.В. Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса : монография / А.В. Чичурин. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : Изд-во РУДН, 2003. – 163 с.

2. Степанюк, Г.П. Об общем решении линейного дифференциального уравнения четвертого порядка, коэффициенты которого удовлетворяют дифференциальной системе третьего порядка / Г.П. Степанюк, А.В. Чичурин // Вестн. Киев. ун-та. Математика и Механика. – 2014. – Вип. 28. – С. 13–16.

3. Чичурин, А.В. Об одном нелинейном уравнении IV-го порядка с постоянными коэффициентами / А.В. Чичурин // Вестн. БрГУ. – 2000. – № 4. – С. 33–38.

4. Степанюк, Г.П. Об одном условии интегрируемости линейного дифференциального уравнения четвертого порядка / Г.П. Степанюк, А.В. Чичурин // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2011. – № 2. – С. 99–103.

5. Степанюк, Г.П. О решениях нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка, связанного с линейными уравнениями четвертого порядка с помощью производной Шварца / Г.П. Степанюк, А.В. Чичурин // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Чебоксары, 12–15 авг. 2013. – Ч. 2. : Математическое моделирование и информационные технологии. – С. 60–66.

6. Wolfram Language & System Documentation Center [Electronic resource]. – Mode of access : http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Root.html.