УДК 517.925

Е.В. Грицук
Беларусь, Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ НА СЛАБОЕ СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ

В результате исследования дифференциального уравнения

$$w^{(n)} = R(w^{(n-1)}, ..., w', w, z), \tag{1}$$

где $R(w^{(n-1)}, ..., w', w, z)$ – рациональная функция относительно первых n аргументов, имеющая аналитические по z в области $G \in \mathbf{C}$ коэффициенты, можем получить, в случае наличия слабого свойства Пенлеве [1], ряды вида

$$w = c_0(z - z_0)^{-\frac{s}{p}} + c_{\frac{1}{p}}(z - z_0)^{-\frac{s-1}{p}} + c_{\frac{2}{p}}(z - z_0)^{-\frac{s-2}{p}} + ..., \tag{2}$$

формально удовлетворяющие уравнению (1). Вопрос сходимости ряда (2) решен в работе [2] путем сведения уравнения (1), в малой окрестности подвижного критического полюса, к системе Брио и Буке. Возникает вопрос о возможности применения другого пути доказательства сходимости, отличного от предложенного в работе [2], а именно – применения замены

$$z = z_0 + \tau^p \tag{3}$$

сразу к уравнению (1), а потом сведения преобразованного уравнения к системе Брио и Буке.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$w'' = -(aw^2 + b)w' + cw - dw^2 - \beta w^3, \tag{4}$$

где константы $a > 0, b < 0, c < 0, d \in \mathbf{R}$, рассмотренное в [1, 2]. Подставим в уравнение (4) разложение (2) и находим $(c_0, s/p) = (c_0, 1/2)$, $c_0^2 = \dfrac{3}{2a}$. При этом ведущими членами уравнения (4) являются w'' и $-aw^2w'$, а индексы Фукса равны $r_1 = -1$, $r_2 = 3/2$.

Ряд, формально удовлетворяющий уравнению (4), имеет вид

$$w = t^{-1/2}\left(c_0 + \frac{c_0(3\beta - ab)t}{2a} + c_{3/2}t^{3/2} + \ldots\right), \tag{5}$$

где $t = z - z_0$. Условие $d = 0$ обеспечивает произвольность коэффициента $c_{3/2}$. Все c_j с номерами $j > \frac{3}{2}$ однозначно определяются через c_0 и $c_{3/2} = h$, где h – произвольная постоянная.

Приведем доказательство сходимости ряда (5). Осуществим замену

$$w = (c_0 + u_1(t))t^{-1/2}, \quad w' = (-c_0/2 + u_2(t))t^{-3/2}, \tag{6}$$

где

$$u_1(t) = \frac{c_0(3\beta - ab)t}{2a} + c_{3/2}t^{3/2} + \dots .$$

Тогда относительно $u_1(t)$, $u_2(t)$ имеем систему

$$tu_1' = \frac{1}{2}u_1 + u_2, \quad tu_2' = \frac{3}{2}u_1 + F_1(u_1, u_2, t), \tag{7}$$

где

$$F_1(u_1, u_2, t) = a(c_0/2u_1^2 - 2c_0u_1u_2 - u_1^2u_2) + bt(c_0/2 - u_2) + ct^2(c_0 + u_1) -$$

$$-dt^{3/2}(c_0 + u_1)^2 - \beta t(c_0 + u_1)^3$$

с собственными значениями матрицы постоянных коэффициентов линейной части $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3/2$. Система (7) не является системой Брио и Буке, так как функция $F_1(u_1, u_2, t)$ не является аналитической в нуле. Кроме того, ряды $u_1(t)$ и $u_2(t)$ не являются степенными.

Для дальнейшего исследования в системе (7) положим

$$t = \tau^2$$

и приходим к системе Брио и Буке

$$\tau U_1' = U_1 + 2U_2, \quad \tau U_2' = 3U_1 + F_2(U_1, U_2, \tau), \tag{8}$$

где $F_2(U_1, U_2, \tau) = 2F_1(u_1, u_2, \tau^2)$, $U_j(\tau) = u_j(\tau^2)$.

Собственные значения матрицы постоянных коэффициентов линейной части системы (8) равны $\widetilde{\lambda}_1 = -2$, $\widetilde{\lambda}_2 = 3$. Сведение уравнения (4) в окрестности подвижного критического полюса к системе Брио и Буке (8) завершает доказательство сходимости ряда (5).

Теперь реализуем другой способ доказательства сходимости ряда (5) и покажем, насколько согласованы эти два способа доказательства. Осуществим замену (3) в уравнении (4), при $p = 2$, получим уравнение

$$\tau w'' = w'(1 - 2\tau^2(aw^2 + b)) + 4\tau^3(cw - dw^2 - \beta w^3). \tag{9}$$

Заметим, что точка $\tau = 0$ является стационарной особой точкой уравнения (9). Соответствующий ряду (5), с учетом замены (3), ряд, формально удовлетворяющий уравнению (9), имеет вид

$$w = c_0\tau^{-1} + c_1 + c_2\tau^1 + c_3\tau^2 + \dots . \qquad (10)$$

Коэффициенты ряда (10), с учетом замены (3), совпадают с соответствующими коэффициентами ряда (5). Для доказательства сходимости ряда (10) осуществим замену

$$w = (c_0 + u_1(\tau))\tau^{-1}, \qquad (11)$$

где

$$u_1(\tau) = c_1\tau + c_2\tau^2 + c_3\tau^3 + \dots .$$

Получаем систему Брио и Буке

$$tu_1' = u_1 + u_2, \quad tu_2' = 6u_1 + f(u_1, u_2, \tau), \qquad (12)$$

где

$$f(u_1, u_2, \tau) = a(2c_0u_1^2 - 4c_0u_1u_2 - 2u_1^2u_2) + 2b\tau^2(c_0 - u_2) + 4c\tau^4(c_0 + u_1) -$$

$$-4d\tau^3(c_0 + u_1)^2 - 4\beta\tau^2(c_0 + u_1)^3, c_0^2 = \tfrac{3}{2a}.$$

Система Брио и Буке (12) имеет собственные значения $\overset{\approx}{\lambda}_1 = -2$, $\overset{\approx}{\lambda}_2 = 3$. Таким образом, сходимость ряда (10) также доказана.

Найдем связь между системами Брио и Буке (8) и (12). Обозначим матрицы линейных частей систем Брио и Буке (8) и (12) через A и B соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B подобны, так как имеет место равенство $BS = SA$, где

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что невырожденным преобразованием система (8) приводится к системе (12). Введем обозначения:

$$\overline{U}(\tau) = (U_1(\tau), U_2(\tau))^T, \overline{u}(\tau) = (u_1(\tau), u_2(\tau))^T,$$

$$\overline{F}(\tau, U_1, U_2) = (0, F(\tau, U_1, U_2))^T, \overline{f}(\tau, u_1, u_2) = (0, f(\tau, u_1, u_2))^T.$$

Тогда системы (8) и (12) примут соответственно вид:

$$\tau\overline{U}'(\tau) = A\overline{U}(\tau) + \overline{F}(\tau, U_1, U_2), \tag{13}$$

$$\tau\overline{u}'(\tau) = B\overline{u}(\tau) + \overline{f}(\tau, u_1, u_2). \tag{14}$$

Умножим систему (13) на матрицу S слева, получим

$$\tau S\overline{U}'(\tau) = SA\overline{U}(\tau) + S\overline{F}(\tau, U_1, U_2). \tag{15}$$

В силу подобия матриц A и B заменим в системе (15) произведение матриц SA на произведение матриц BS, получаем

$$\tau S\overline{U}'(\tau) = BS\overline{U}(\tau) + S\overline{F}(\tau, U_1, U_2). \tag{16}$$

Полагаем

$$S\overline{U}(\tau) = \overline{u}(\tau). \tag{17}$$

Очевидно, с учетом (17), что главные части систем (14) и (16) совпадают. Также можно убедиться, что для нелинейных частей систем (14) и (16) имеет место, с учетом (17), следующее равенство $S\overline{F}(\tau, U_1, U_2) = \overline{f}(\tau, u_1, u_2)$. Таким образом, системы (14) и (16) совпадают полностью. Значит, системы (13) и (14) эквивалентны, а их решения связаны соотношением (17).

Таким образом, показано, что для уравнения (4) два различных способа доказательства сходимости ряда вида (5) приводят к эквивалентным системам Брио и Буке (13) и (14), решения которых связаны соотношением (17).

Список литературы

1. Conte, R. The Painleve' Handbook / R. Conte, M. Musette. – Dordrecht, 2008. – P. 256.

2. Грицук, Е.В. О алгеброидных решениях дифференциальных уравнений / Е.В. Грицук // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 1. – С. 126–131.